

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PROPRIÉTÉS DES TABLEAUX DE PERMUTATION ET
DES TABLEAUX-VIDÉS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JÉRÔME PARÉ

NOVEMBRE 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
OBJETS ET CONCEPTS DE BASE	3
1.1 Diagrammes de Ferrer	3
1.2 Objets définis par récurrence	6
1.3 Polynômes énumérateurs	7
1.4 Permutations	8
1.5 Quelques statistiques sur les permutations	9
1.6 Motifs	10
CHAPITRE II	
TABLEAUX DE PERMUTATION ET TABLEAUX-VIDÉS	13
2.1 Tableaux de permutation	13
2.2 Points essentiels et tableaux-vidés	26
2.3 Bijection entre tableaux de permutation et tableaux-vidés	28
CHAPITRE III	
TRADUCTION DES STATISTIQUES EN TERME DE TABLEAUX	35
3.1 Croisements et alignements en terme de tableaux	35
3.2 Cycles, excédances et tableaux-vidés	38
3.3 Motifs et tableaux de permutation	43
CHAPITRE IV	
ÉNUMÉRATION DES TABLEAUX DE PERMUTATION SELON LEURS STA- TISTIQUES	47
4.1 Polynômes associés aux tableaux de permutation	47
CHAPITRE V	
TABLEAUX DE PERMUTATION ET MÉCANIQUE STATISTIQUE	57
5.1 La mécanique statistique	57
5.2 Les tableaux de permutation et PASEP	59

5.3	Tableaux de Catalan	61
5.3.1	Tableaux de Catalan et TASEP	62
	CONCLUSION	65
	INDEX	67
	RÉFÉRENCES	71

RÉSUMÉ

Le présent mémoire est une synthèse de quelques-uns des principaux résultats d'auteurs tels que Burstein, Corteel, Steingrímsson, Viennot et Williams traitant des tableaux de permutation et des tableaux-vidés. Ceux-ci sont des diagrammes dits de Ferrer remplis de 1 et de 0 selon certaines contraintes. Comme on le montrera, l'ensemble des tableaux de permutation et l'ensemble des tableaux-vidés sont en bijection avec l'ensemble des permutations. On introduit un algorithme mettant en évidence une bijection directe entre tableaux de permutation et tableaux-vidés. Ceci répond à une question apparemment ouverte de Burstein. On présente ensuite comment traduire plusieurs statistiques sur les permutations (nombre de croisements, d'alignements, de certains motifs, etc) dans le contexte des tableaux de permutation et des tableaux-vidés. Le principal résultat combinatoire sur les tableaux de permutation est une expression polynomiale donnant la distribution complète d'un motif de permutation de longueur supérieure à 2. On termine par une étude d'un sous-ensemble des tableaux de permutation : l'ensemble des tableaux de Catalan. Les tableaux de permutation et les tableaux de Catalan apparaissent naturellement, en liaison avec les problèmes de la mécanique statistique, notamment dans l'étude des modèles « Partially Asymmetric Exclusion Model » (PASEP) et « Totally Asymmetric Exclusion Model » (TASEP). Ils permettent de déterminer les probabilités stationnaires de particules en mouvement.

Mots clés : Tableau de permutation, tableau-vidé, permutation, tableau de Catalan, PASEP

INTRODUCTION

Le but de ce mémoire est de présenter de « nouveaux » objets mathématiques appelés tableaux de permutation et tableaux-vidés. Leur domaine d'étude se situe à la frontière de la combinatoire énumérative, de la physique statistique et de la géométrie algébrique. Bien qu'on présente quelques-unes de leurs applications physiques, l'emphasis est mise sur leurs aspects combinatoires. Le présent texte consiste principalement en une synthèse de certains des principaux résultats récents sur les tableaux de permutation et sur les tableaux-vidés étudiés par plusieurs chercheurs, dont Burstein, Corteel, Steigrimsson, Viennot et Williams. Certaines de leurs démonstrations, utiles à une meilleure compréhension de la théorie globale, sont présentées ici de façon plus explicite et parfois clarifiée.

Au chapitre 1, on débute par la présentation de quelques notations et propriétés de base des diagrammes de Ferrer et des tableaux. Un rappel sur les permutations précède ensuite l'introduction de plusieurs statistiques sur les permutations telles que le nombre de croisements, d'alignements, d'excédances et de motifs.

On présente au chapitre 2 deux ensembles de tableaux qui sont en bijection avec les permutations : l'ensemble des tableaux de permutation et l'ensemble des tableaux-vidés. Les tableaux de permutation sont des diagrammes de Ferrer ayant des cases pointées ou vides selon une contrainte particulière d'équerre. On définit ce que sont les points essentiels d'un tableau de permutation, puis on les « retire » pour construire un tableau-vidé. On met enfin l'ensemble des tableaux de permutation en bijection directe avec celui des tableaux-vidés par le biais d'un algorithme.

On illustre au chapitre 3 comment plusieurs statistiques sur les permutations se traduisent facilement dans le contexte des tableaux de permutation et des tableaux-vidés.

Cette section pave la voie à un important résultats de ce texte, présenté au chapitre suivant.

Au chapitre 4, on présente plusieurs polynômes énumérateurs dénombrant diverses statistiques sur les tableaux de permutation. On présente ensuite l'un des principaux résultats de ce texte démontré par Williams et Corteel : on présente la première expression polynomiale connue donnant la distribution complète d'un motif de permutation de longueur supérieure à 2.

On montre au chapitre 5 une des utilisations des tableaux de permutation en mécanique statistique, en lien avec un modèle d'interaction entre particules « gazeuses » appelé « Partially Asymmetric Exclusion Model » (PASEP). Les tableaux de permutation permettent notamment de déterminer la probabilité que les particules se retrouvent à terme dans une certaine configuration. L'ensemble des tableaux de Catalan, qui est en fait un sous-ensemble particulier de l'ensemble des tableaux de permutation, facilite l'étude d'un second modèle de mécanique statistique appelé « Totally Asymmetric Exclusion Model » (TASEP). L'ensemble des tableaux de permutation peut être mis en bijection avec des familles d'objets combinatoires dénombrés par les nombres de Catalan.

On termine en suggérant quelques pistes intéressantes pour poursuivre l'étude du fascinant sujet que représentent les tableaux de permutation.

CHAPITRE I

OBJETS ET CONCEPTS DE BASE

On débute par l'introduction des diagrammes de Ferrer. On rappelle ensuite ce que sont les polynômes énumérateurs, puis on poursuit par un rappel de quelques propriétés et notations de base des permutations qui représentent la pierre angulaire des « tableaux de permutation » et des « tableaux-vidés » présentés plus tard. On introduit enfin quelques « statistiques » sur les permutations.

1.1 Diagrammes de Ferrer

Soit n un entier de l'ensemble $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Un **partage** λ de n est une suite faiblement décroissante d'entiers naturels positifs λ_i tels que

$$n = \sum_i \lambda_i$$

On note $|\lambda| = n$ et $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)$.

Exemple 1.1.1. Les partages de 4 sont : $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 1)$.

Définition 1.1.1. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$. On appelle **case** (i, j) le carré dont les sommets sont les points $A = (i, j)$, $B = (i - 1, j)$, $C = (i - 1, j - 1)$ et $D = (i, j - 1)$. Il est habituel de simplement désigner cette case par (i, j) .

Un **diagramme de Ferrer** est un sous-ensemble fini Y de $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ tel que si $(a, b) \in Y$, alors pour tout $i \leq a$, pour tout $j \leq b$, $(i, j) \in Y$.

À chaque partage $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$, on associe le diagramme de Ferrer $Y = Y_\lambda$. Ce dernier est l'ensemble des cases (λ_i, i) , pour $1 \leq i \leq h$. On dit alors que Y est de forme λ . Par exemple, la figure 1.1 illustre le diagramme de Ferrer associé au partage $\lambda = (4, 3, 3, 1)$.

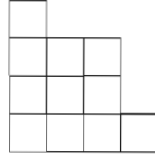


Figure 1.1 Diagramme de Ferrer.

Pour un diagramme de Ferrer Y , la **ligne** i de Y est l'ensemble des case $(x, i) \in Y$, et la **colonne** j est celui des $(j, y) \in Y$. De plus, on définit la **longueur** d'une ligne i comme étant le nombre de x tel que $(x, i) \in Y$ et la **hauteur** de la colonne j comme étant le nombre de y tel que $(j, y) \in Y$.

Définition 1.1.2. On appelle **rectangle** de dimension $k \times m$ un diagramme de Ferrer constitué de k lignes de longueur m .

Naturellement, pour Y et Z deux diagrammes de Ferrer, on dit que Y est **contenu** dans Z si $Y \subseteq Z$. Ainsi, le diagramme de Ferrer Y de la figure 1.1 est contenu dans le rectangle 5×5 comme l'illustre la figure 1.2.

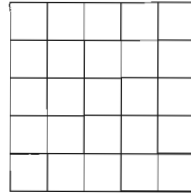


Figure 1.2 Diagramme de Ferrer inclus dans un rectangle.

Un **remplissage** du diagramme Y est une fonction $r : Y \rightarrow \{0, 1\}$. On dit qu'une case de Y est **remplie** par la valeur $r(i, j)$. Une case (i, j) est dite **pointée** si $r(i, j) = 1$,

et **vide** sinon. On marque le fait qu'une case soit pointée en y dessinant le symbole \bullet . Un **tableau** est couple (Y, r) où r est un remplissage de Y . Les cases du tableau $t = (Y, r)$ sont les cases de Y et les notions se rattachant à Y sont définies de la même manière pour t , notamment les notions lignes, colonnes, etc.

La **région à l'ouest** (resp. **région à l'est**) d'une case $(a, b) \in Y$ est l'ensemble des cases $(x, b) \in Y$ telles que $x < a$ (resp $x > a$). La **région au sud** (resp. **région au nord**) est l'ensemble des cases $(a, y) \in Y$ telles que $y < b$ (resp. $y > b$). Dans le diagramme de Ferrer de la figure 1.3, les cases de la région à l'ouest de la case marquée d'un « \bullet » sont indiquées par un o , celles de la région à l'est par un e , et ainsi de suite pour les régions nord (n) et sud (s).

	n		
	n		
o	\bullet	e	e
	s		

Figure 1.3 Régions autour d'une case.

On dit qu'une case x est **bornée à l'ouest** s'il existe une case pointée dans la région à l'ouest de x . On généralise de façon évidente aux trois autres points cardinaux.

On appelle **pas** un couple $((a, b), (c, d))$ de points dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$(c, d) = \begin{cases} (a, b) \pm (1, 0) & \text{ou} \\ (a, b) \pm (0, 1) \end{cases}$$

Ce pas est appelé **pas nord** si $(c, d) = (a, b + 1)$, **pas sud** si $(c, d) = (a, b - 1)$, **pas est** si $(c, d) = (a + 1, b)$ et **pas ouest** si $(c, d) = (a - 1, b)$. Pour tout pas $\pi = ((a, b), (c, d))$, son **début** $d(\pi)$ est le point (a, b) et sa **fin** $f(\pi)$ est le point (c, d) . On dit que deux points d'un pas sont **adjacents**.

Enfin, un **chemin** $\gamma = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ de longueur k est une suite de pas tels que $d(\pi_i) = f(\pi_{i-1})$ pour $1 < i \leq k$. On note parfois ce chemin $(d(\pi_1), d(\pi_2), \dots, d(\pi_k), f(\pi_k))$,

et si le point x est élément d'un des pas p_i , alors on dit, avec un léger abus de langage, que x est élément de γ . De plus, on généralise les définitions de début et de fin d'un pas aux chemins. Ainsi, $d(\gamma) = d(\pi_1)$ et $f(\gamma) = f(\pi_k)$.

1.2 Objets définis par récurrence

Comme on aura à décrire récursivement des familles d'objets combinatoires d'une façon un peu plus complexe que les descriptions récursives plus courantes sur les entiers, rappelons les grandes lignes de ce processus. On commence par munir les objets considérés d'une notion de « taille », pour ensuite décrire comment ces objets sont construits à partir d'objets similaires de plus petite « taille ». On rappelle d'abord la notion suivante de « bon ordre ».

Définition 1.2.1. Soit ρ un ordre total sur un ensemble E dénombrable. On dit qu'il s'agit d'un **bon ordre** si pour tout sous-ensemble non-vide $A \subseteq E$, A possède un plus petit élément. On dit d'un ensemble possédant un tel ordre qu'il est **bien ordonné**.

Exemple 1.2.1. L'ordre ρ suivant sur l'ensemble des diagrammes de Ferrer est un bon ordre : pour tout partage $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$, on a que $\lambda < \mu$ si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- $|\lambda| < |\mu|$
- $|\lambda| = |\mu|$ et $\lambda_i > \mu_i$, avec $\lambda_j = \mu_j$, pour tout $0 < j \leq i - 1$.

Selon cet ordre ρ , voici les plus petits diagrammes de Ferrer.

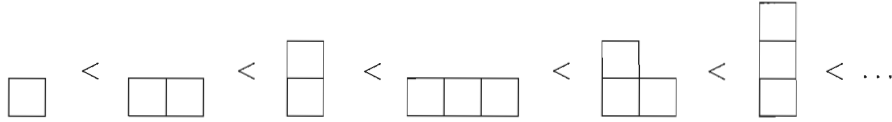


Figure 1.4 Les plus petits partages selon l'ordre ρ .

Soit E un ensemble bien ordonné dénombrable et $x \in E$, on définit l'ensemble des éléments plus petits que x par $\bar{x} := \{y \mid y < x\}$. Un processus récursif Φ permet d'exprimer chaque élément x de E en fonction d'éléments de \bar{x} . Considérons l'ensemble

fini $F_\Phi \subseteq E$ tel que si $y < z$ avec $z \in F_\Phi$, alors $y \in F_\Phi$. Les éléments de F_Φ sont appelés **conditions initiales** de Φ . Pour tout $x \in E$, la récurrence est exprimée comme suit :

$$x = \begin{cases} x & \text{si } x \in F_\Phi \\ \Phi(\bar{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

La récursivité classique est ici simplement reformulée légèrement pour l'adapter aux besoins du reste du texte, à savoir que l'ensemble E peut être différent de \mathbb{N} .

1.3 Polynômes énumérateurs

Soit E un ensemble fini non-vidé. Rappelons qu'une « statistique sur E » est simplement une fonction $\tau : E \rightarrow \mathbb{N}$, et on considère le **polynôme énumérateur** de τ défini comme :

$$P_{\tau,E}(x) := \sum_{e \in E} x^{\tau(e)}.$$

Ce polynôme dénombre les éléments $e \in E$ selon un poids $x^{\tau(e)}$. Autrement dit, le coefficient du monôme x^k est le nombre d'éléments de E pour lesquels $\tau(e) = k$. Notons que $P_{\tau,E}(1) = |E|$.

Exemple 1.3.1. Considérons l'ensemble des tableaux tels que le nombre de lignes additionné du nombre de colonnes totalise n et tels que chaque colonne possède au moins une case pointée. Soit τ la statistique qui compte le nombre de points dans les remplissages possibles des tableaux de cet ensemble. Désignons par $P_n(x)$ le polynôme énumérateur de τ , alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x \\ P_3(x) &= 2x + 2x^2 \\ P_4(x) &= 3x + 9x^2 + 7x^3 + x^4 \\ P_5(x) &= 4x + 24x^2 + 48x^3 + 40x^4 + 14x^5 + 2x^6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Les tableaux associés aux premiers polynômes ci-haut sont présentés ci-après :

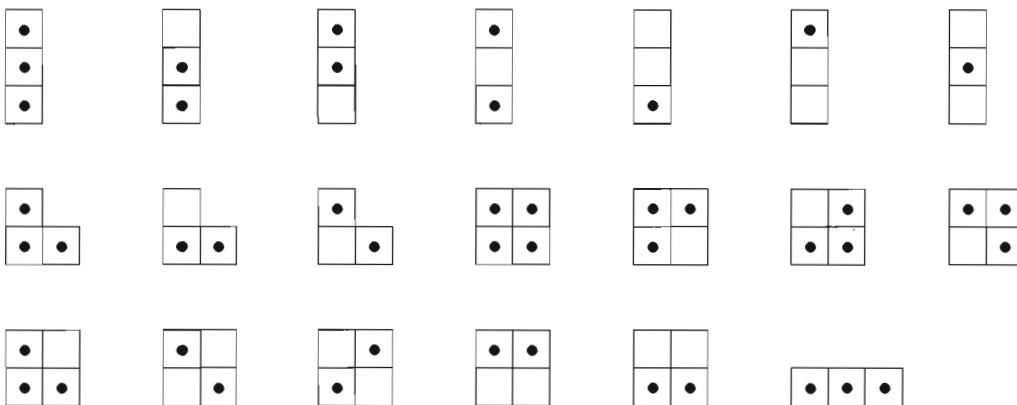
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



1.4 Permutations

Rappelons certains concepts et propriétés associés aux permutations et en lien direct avec le présent texte. Premièrement, afin de simplifier l'écriture, notons

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

Définition 1.4.1. Une **permutation** π de $[n]$ est une bijection de $[n]$ dans lui-même. On note S_n l'ensemble de toutes les permutations sur $[n]$.

Soit $\pi(i) = \pi_i$, alors on note $\pi_1\pi_2\dots\pi_n$ la permutation $\pi \in S_n$. Il est également fréquent de la représenter selon ses cycles, en omettant ceux de longueur 1. Pour chaque cycle $(abc\dots d)$, on a $\pi(a) = b, \pi(b) = c, \dots, \pi(d) = a$. Par exemple, les notations suivantes

représentent la même permutation :

$$84156273 = (1, 8, 3)(2, 4, 5, 6)(7) = (1, 8, 3)(2, 4, 5, 6)$$

On appelle **point fixe** d'une permutation π une valeur i telle que $\pi(i) = i$ et **dérangement** une permutation qui ne contient pas de point fixe.

Soit $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$ une permutation, on dit que $\sigma = \pi_{i_1}\dots\pi_{i_k}$ est une **sous-permutation** de π si $i_1 < \dots < i_k \leq n$. Par exemple, 284 est une sous-permutation de 72163854. Les prochaines sections présentent plusieurs statistiques intéressantes sur les permutations.

1.5 Quelques statistiques sur les permutations

Une **descente** d'une permutation π est une valeur i telle que $\pi(i) > \pi(i+1)$. On note $D(\pi)$ l'ensemble des descentes de la permutation π . De plus, une valeur i est appelée **excédance** si $\pi(i) \geq i$. Sinon, on dit que i est une **non-excédance**. On note π^\uparrow le nombre d'excédances d'une permutation π donnée.

Les six statistiques suivantes définies dans (Corteel, 2006) sont centrales à plusieurs résultats présentés. Notons que, dans tous les cas, $i < j$.

$$A_{\uparrow\uparrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid i < j \leq \pi(j) < \pi(i)\}|$$

$$A_{\downarrow\downarrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid \pi(j) < \pi(i) < i < j\}|$$

$$A_{\uparrow\downarrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid i \leq \pi(i) < \pi(j) < j\}|$$

$$A_{\downarrow\uparrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid \pi(i) < i < j \leq \pi(j)\}|$$

$$C_{\uparrow\uparrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid i < j \leq \pi(i) < \pi(j)\}|$$

$$C_{\downarrow\downarrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid \pi(i) < \pi(j) < i < j\}|$$

où i, j sont des indices de la permutation et où la première et la deuxième flèche représentent respectivement l'excédance ou la non-excédance de i et de j par la permutation. On peut illustrer ces statistiques, comme à la figure 1.5, à l'aide du diagramme simplement contruit comme suit :

- On trace une droite horizontale « graduée » de 1 à n .
- On relie chaque indice i à son image $\pi(i)$ par un arc au-dessus de la droite si i est une excédance et par un arc en-dessous sinon.

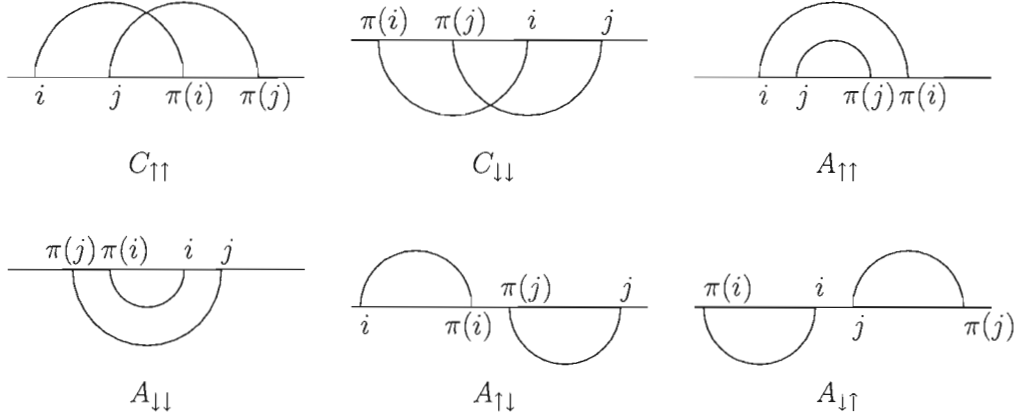


Figure 1.5 Croisements et alignements sur le diagramme de permutations.

Certaines de ces statistiques possèdent un vocabulaire propre expliqué par les diagrammes de la figure 1.5. Ces notions interviennent entre autre en bioinformatique.

Définition 1.5.1. Les statistiques $C_{\uparrow\uparrow}(\pi)$ et $C_{\downarrow\downarrow}(\pi)$ sont appelées **croisements** de π .

Définition 1.5.2. Les statistiques $A_{\uparrow\uparrow}(\pi)$, $A_{\downarrow\downarrow}(\pi)$, $A_{\uparrow\downarrow}(\pi)$ et $A_{\downarrow\uparrow}(\pi)$ sont appelées **alignements** de π .

1.6 Motifs

Voyons enfin ce qu'est un motif de permutation. L'un des principaux résultats de ce texte, présenté au chapitre 4, consiste en une expression polynomiale donnant la distribution complète d'un certain type de motif de permutation. Il est donc essentiel de bien définir cette statistique.

Définition 1.6.1. Un **motif classique** est une permutation $w = m_1 \star m_2 \star \dots \star m_k$.

Une **occurence** de w dans une permutation $\pi = p_1p_2\dots p_n$ est la sous-permutation $\sigma = p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}$ de π telle que l'ordre relatif des p_{i_r} soit la même que celui des m_r . On écrit une étoile entre deux éléments consécutifs de w pour souligner que les éléments correspondants de σ n'ont pas à être consécutifs dans π . Un **motif généralisé**, ou simplement motif, est un motif classique dans lequel certaines paires de lettres consécutives ne sont pas séparées par des étoiles. Cela signifie que les lettres correspondantes de σ doivent être consécutives dans π .

Exemple. Soit la permutation $p = 52413$. Elle contient trois occurrences du motif classique $w = 3\star 1\star 2$, soit 524, 523 et 513. Par contre, elle ne contient que deux occurrences du motif généralisé $3\star 12$, soit 524 et 513. En effet, dans le cas 523, le 2 n'est pas adjacent au 3 dans la permutation p et n'est pas une occurrence du motif généralisé $(3\star 12)$ pour cette raison.

On associe à chaque motifs w la fonctions de S_n vers \mathbb{N} qui associe à la permutation π le nombre d'occurrences de w dans π . Ainsi, avec l'exemple précédent, on a $(3\star 1\star 2)\pi = 3$ et $(3\star 12)\pi = 2$.

Le tableau 1.1 donne, pour les quatre permutations 128947635, 289435761, 985417632 et 135782469 de la figure 1.6, les statistiques introduites dans ce chapitre.

π	π^\uparrow	$A_{\uparrow\uparrow}$	$A_{\downarrow\downarrow}$	$A_{\uparrow\downarrow}$	$A_{\downarrow\uparrow}$	$C_{\uparrow\uparrow}$	$C_{\downarrow\downarrow}$
128947635	5	2	3	8	1	1	1
289435761	5	4	3	5	2	1	0
985417632	5	8	3	2	1	0	2
135782469	6	0	0	6	3	4	2

Tableau 1.1 Quatre permutations et leurs propriétés.

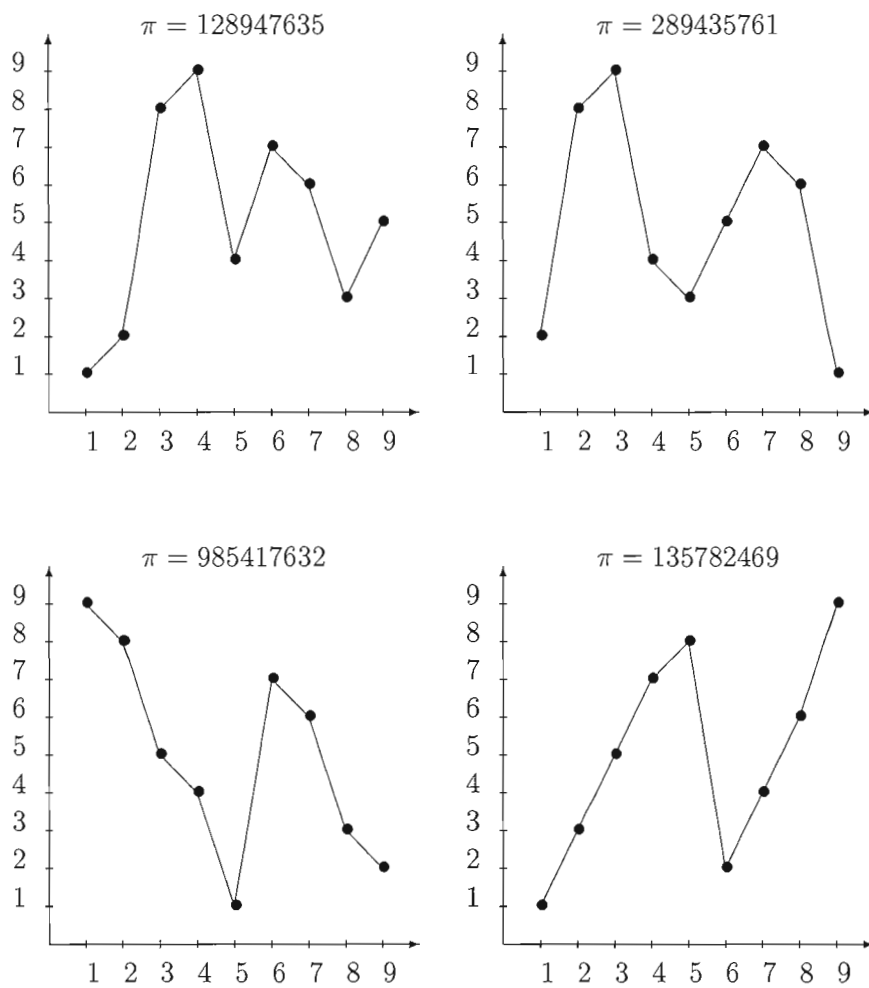


Figure 1.6 Graphiques de permutations.

CHAPITRE II

TABLEAUX DE PERMUTATION ET TABLEAUX-VIDÉS

On étudie ici deux ensembles de tableaux : celui des « tableaux de permutation » et celui des « tableaux-vidés ». Le premier ensemble est sans contredit l'objet central de ce texte, mais le second contribue à la compréhension du lien entre la notion de tableau et celle de permutation. Chacun de ces ensembles peut être mis en bijection avec l'ensemble des permutations. On définit chacun de ces deux ensembles, puis on construit une bijection directe entre eux.

2.1 Tableaux de permutation

Définition 2.1.1. Un **tableau de permutation** $T = (t, k, n)$ est un triplet formé d'un tableau $t = (Y, r)$ contenu dans un rectangle de dimension $k \times (n - k)$, i.e. $Y \subseteq k \times (n - k)$, et ayant les propriétés suivantes :

1. Pour toute colonne j de t , il existe a tel que $(j, a) \in t$ est pointée.
2. Si la case $(i, j) \in t$ est bornée à l'ouest et au sud, alors (i, j) est pointée.

Notons qu'un remplissage de $T = (t, k, n)$ est un remplissage de t et que la forme de T est la forme de t . Tous les autres termes définis pour un tableau se définissent de la même façon pour un tableau de permutation, notamment les définition de case, de ligne, de colonne, de chemin, etc.

On appelle case **fantôme** chaque cases du rectangle $k \times (n - k)$ n'appartenant pas à t . Dans les figures, on délimite ces cases par des pointillées. Soit $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ la forme

de T , alors le nombre de colonnes $n - k$ de T est égal à λ_1 . En effet, si $n - k > \lambda_1$, alors les cases de la $\lambda_1 + 1$ colonne de T sont toutes des cases fantômes. Comme aucune n'est alors une case pointée, on contredit à la première propriété des tableaux de permutation.

La figure 2.1 illustre un exemple de tableau de permutation suivi de deux contre-exemples qui ne satisfont pas aux propriétés 1 et 2 respectivement. En effet, dans le second tableau de la figure 2.1, la 4e colonne ne contient aucune case pointée, et dans le troisième tableau, la case $(2, 2)$ est bornée au sud et à l'ouest, mais est vide. On considère

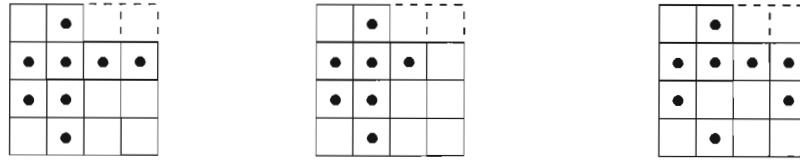


Figure 2.1 Exemple et contre-exemples de tableaux de permutation.

les trois statistiques suivantes sur le tableau de permutation T :

- le nombre $a(T)$ de cases vides de T .
- le nombre $b(T)$ de cases pointées de T .
- le nombre $c(T)$ de cases fantômes de T .

Rappelons qu'un pas est un couple $((a, b), (c, d))$ de points adjacents du plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Le pas est nord si $(c, d) = (a, b + 1)$ et ouest si $(c, d) = (a - 1, b)$. Soit $T = (t, k, n)$ un tableau de permutation de forme $(\lambda_1, \dots, \lambda_h)$. On considère le chemin $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_z, \mu_1, \dots, \mu_{k-h})$ constitué de pas nord et de pas ouest de t tel que $\gamma_1 = ((\lambda_1, 0), (\lambda_1, 1))$, que γ_i soit l'intersection d'une case de t et d'une case extérieure à t et que les $k - h$ derniers pas soient des pas nord. Rappelons que k est le nombre de lignes de T et h le nombre de lignes de t . On appelle **chemin de partage** de T le chemin γ . Par exemple, le chemin de partage du tableau de permutation de la figure 2.2 est $((6, 0), (6, 1), (6, 2), (5, 2), (5, 3), (4, 3), (3, 3), (2, 3), (2, 4), (1, 4), (0, 4), (0, 5))$. La longueur n du chemin de partage d'un tableau de permutation T est appelé l'**index** de T . La figure 2.3 présente trois tableaux de permutation d'index différents.

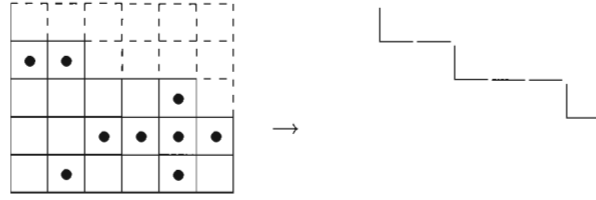


Figure 2.2 Chemin de partage d'un tableau de permutation.

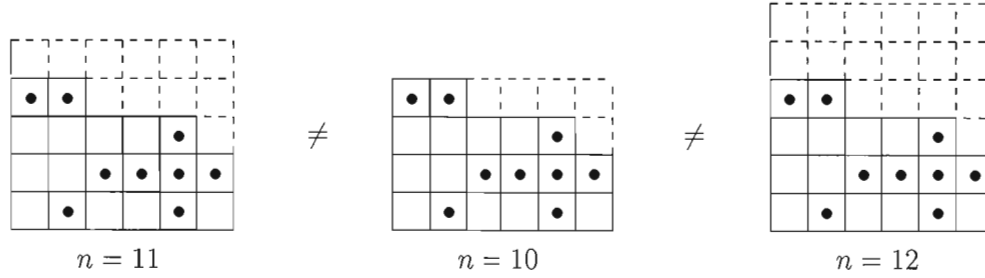


Figure 2.3 Des tableaux de permutation d'index différents.

On associe à chacune des lignes et à chacune des colonnes un élément distinct de l'ensemble $[n]$. Chacun de ces nombres est appelé **étiquette** de ligne ou de colonne selon le cas et est déterminé de la façon suivante. Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ les n pas du chemin de partage ξ du tableau de permutation T . Si ξ_i est un pas nord, alors la ligne intersectant ξ_i est étiquetée i , alors que si ξ_i est un pas ouest, alors c'est la colonne intersectant ξ_i qui est étiquetée i . On écrit l'étiquette de chaque colonne au-dessous de celle-ci et l'étiquette de chaque ligne à sa gauche lorsqu'on désire l'indiquer sur le dessin du tableau de permutation. Un exemple est donné à la figure 2.4. On peut maintenant définir une case (x, y) de T par ses **T -coordonnées**. On note $(a, b)_T$ la case de T à l'intersection de la ligne étiquetée a et de la colonne étiquetée b .

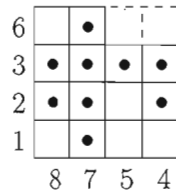


Figure 2.4 Étiquettes de lignes et de colonnes d'un tableau de permutation.

Soit $T = (t, k, n)$ un tableau de permutation. Un **trait** $\tau = ((a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r))$ de T avec

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = \begin{cases} (a_i + 1, b_i) & \text{pour tout } 0 < i < r - 1 \text{ ou} \\ (a_i - 1, b_i) & \text{pour tout } 0 < i < r - 1 \text{ ou} \\ (a_i, b_i + 1) & \text{pour tout } 0 < i < r - 1 \text{ ou} \\ (a_i, b_i - 1) & \text{pour tout } 0 < i < r - 1 \end{cases}$$

est un $(r + 1)$ -uplet de cases de T tel que (a_i, b_i) est vide pour tout $0 < i < r$ et tel que le **début** $d(\tau) = (a_0, b_0)$ et la **fin** $f(\tau) = (a_r, b_r)$ de τ soient soit des cases pointées, soit des cases n'étant pas éléments de t . Le trait est appelé **trait est** lorsque $(a_{i+1}, b_{i+1}) = (a_i + 1, b_i)$, **trait ouest** lorsque $(a_{i+1}, b_{i+1}) = (a_i - 1, b_i)$, **trait nord** lorsque $(a_{i+1}, b_{i+1}) = (a_i, b_i + 1)$ et **trait sud** lorsque $(a_{i+1}, b_{i+1}) = (a_i, b_i - 1)$. On dénote le trait τ par l'expression $\tau := (a_0, b_0) \rightsquigarrow (a_r, b_r)$. Toutefois, lorsque $d(\tau) \notin t$ ou $f(\tau) \notin t$, on dit que le début ou la fin (respectivement) de τ est l'étiquette de la ligne ou de la colonne contenant toutes les cases de τ . Par exemple, la figure 2.5 présente le trait ouest $(4, 2) \rightsquigarrow (2, 2)$, le trait nord $(1, 2) \rightsquigarrow (1, 3)$ et le trait sud $7 \rightsquigarrow (2, 4)$. Notons qu'on considère parfois un trait comme l'ensemble des cases qu'il contient.

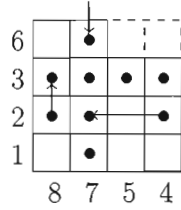


Figure 2.5 Traits d'un tableau de permutation

Un **tracé** $\tau := (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ dans un tableau de permutation T , noté $d(\tau_1) \rightsquigarrow d(\tau_2) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow d(\tau_k) \rightsquigarrow f(\tau_k)$ ou encore $d(\tau_1) \rightsquigarrow_* f(\tau_k)$, est une suite de traits de T telle que $d(\tau_i) = f(\tau_{i-1})$, pour $1 < i \leq k$. Lorsque $d(\tau_1)$ et $f(\tau_k)$ sont des étiquettes de T , on dit que le tracé τ est un **parcours** de T et on le note $i \rightsquigarrow_* j$. On généralise les notions de début et de fin des traits aux tracés et aux parcours. Ainsi, le début $d(p)$ d'un parcours $p := i \rightsquigarrow_* j$ est i et sa fin $f(p)$ est j . Notons qu'un parcours, tout comme un

tracé, est parfois considéré comme une suite de cases de T . On définit maintenant deux ensembles de parcours d'un tableau de permutation T , appelés ensembles $D(T)$ et $G(T)$ de **parcours en zigzag**.

Soit $p := (\tau_1, \dots, \tau_g, \mu_1, \dots, \mu_m) = i \rightsquigarrow_* j$ un parcours en zigzag de $D(T)$ ou de $G(T)$. Le **tracé initial** $i(p) := (\tau_1, \dots, \tau_g)$ de p est le tracé $i \rightsquigarrow_* z_1$ avec z_1 défini plus bas, alors que le **zigzag** $z(p) := (\mu_1, \dots, \mu_m)$ de p est le tracé $z_1 \rightsquigarrow_* j$.

Les tracés initiaux varient selon que $p := (\tau_1, \dots, \tau_g, \mu_1, \dots, \mu_m)$ soit un parcours de $D(T)$ ou de $G(T)$. Si p est un parcours de $D(T)$, alors $i(p) := (\tau_1, \dots, \tau_g)$ est la plus longue suite possible de traits ouest (si i est l'étiquette d'une ligne) ou la plus longue suite de traits sud (si i est l'étiquette d'une colonne) telle que $d(\tau_1) = i$. La case $f(\tau_g)$ est notée z_1 . Par contre, si p est un parcours de $G(T)$, alors le tracé initial $i(p) := (\tau_1)$ est le trait nord (si i est l'étiquette d'une ligne) ou le trait est (si i est l'étiquette d'une colonne) tel que $d(\tau_1) = i$. Comme précédemment, on note z_1 la case $f(\tau_1)$. Le zigzag $z(p) := (\mu_1, \dots, \mu_m)$ du parcours p appartenant à $D(T)$ ou à $G(T)$ est défini comme suit :

- Si τ_g est un trait est ou un trait ouest, alors μ_1 est un trait nord. Sinon, μ_1 est un trait est.
- Pour tout $1 \leq r < m$, si μ_r est un pas nord, , alors μ_{r+1} est un pas est et vice-versa.
- $f(\mu_m) = j$.

Les figures 2.6 et 2.7 donnent quelques exemples de parcours en zigzag des ensembles $D(T)$ et $G(T)$ respectivement.

Remarque. À partir de maintenant, on écrit simplement parcours lorsqu'il est question de parcours en zigzag.

Un cas particulier à considérer est le cas d'une ligne du tableau de permutation T ne contenant que des cases fantômes. Tout parcours en zigzag ayant comme début l'étiquette d'une telle ligne a cette même étiquette i de ligne comme fin, car la ligne ne contient aucune case pointée. Notons que les ensembles $D(T)$ et $G(T)$ contiennent autant de parcours que l'index du tableau de permutation T car toute étiquette est le

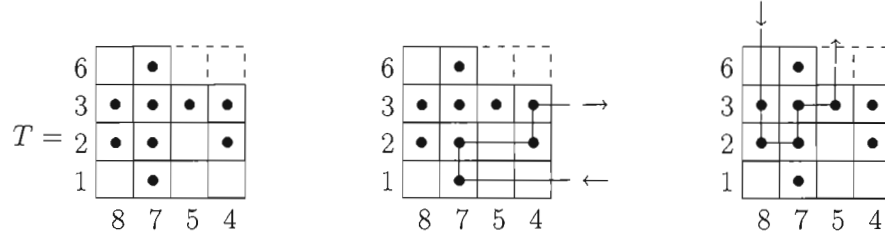


Figure 2.6 Les parcours $1 \rightsquigarrow 3$ et $8 \rightsquigarrow 5$ de $D(T)$.

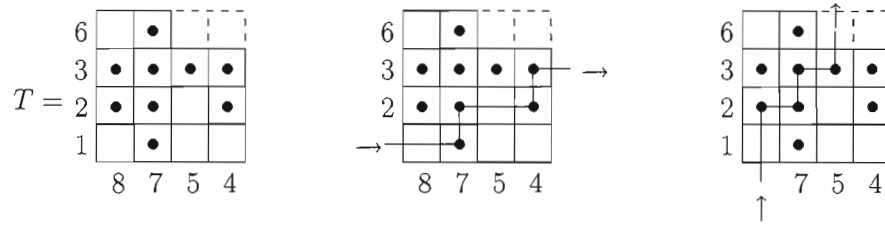


Figure 2.7 Les parcours $1 \rightsquigarrow 3$ et $8 \rightsquigarrow 5$ de $G(T)$.

début d'un et un seul parcours de $D(T)$ ou $G(T)$. Le lemme 2.1.1, est utile dans la preuve de plusieurs propositions à suivre.

Lemme 2.1.1. *Pour toute case x d'un tableau de permutation T , il existe deux et seulement deux parcours en zigzag de $G(T)$ contenant x .*

Démonstration. Supposons qu'aucun parcours de $G(T)$ ne possède de trait est contenant x . Construisons le tracé $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_n)$ tel que $d(\tau) = x$, $f(\tau_n)$ est l'étiquette d'une ligne ou d'une colonne et tel que τ_i est un trait ouest pour tout i impair et un trait sud pour tout i pair. Le tracé τ peut être réécrit $\tau = x \rightsquigarrow_* j$, avec j l'étiquette d'une ligne ou d'une colonne. Il existe un parcours p de $G(T)$ tel que $d(p) = j$. Par construction de τ , ce parcours p contient toutes les mêmes cases que τ , notamment x . De plus, ce parcours est unique. De la même façon, le parcours possédant un trait nord contenant x est unique. \square

Soit E l'ensemble de tous les tableaux de permutation d'index n . Considérons la

fonction suivante.

$$\begin{aligned}\Omega : E &\rightarrow S_n \\ T &\mapsto \Omega(T)\end{aligned}$$

Pour chaque étiquette i d'un tableau de permutation, il existe un unique parcours $p_i := i \rightsquigarrow_* j$ dans $G(T)$. La fonction $\Omega(T)$ est définie par $\Omega(T)(i) = f(p_i) = j$. Comme $G(T)$ contient n parcours et que $\Omega(T)$ est injective (car les parcours sont inversibles), on a bien que Ω est une permutation. Dans l'exemple de la figure 2.6 (voir page 18), le tableau T est envoyé par Ω sur la permutation $\Omega(T) = 36824715$. En particulier, $\Omega(T)(1) = 3$ et $\Omega(T)(8) = 5$. La construction même des parcours en zigzag amène le lemme suivant.

Lemme 2.1.2. *Chaque étiquette de ligne i de T est une excédance de $\Omega(T)$ et chaque étiquette de colonne j de T est une non-excédance de $\Omega(T)$*

Notons que la permutation induite par les parcours de $D(T)$ est la même que celle induite par les parcours de $G(T)$, car pour tout parcours p_g de $G(T)$ il existe un parcours p_d de $D(T)$ tel que $d(p_g) = d(p_d)$ et $f(p_g) = f(p_d)$.

Tout tableau de permutation est envoyé par Ω sur une permutation. On va décrire un algorithme du à Burstein (Burstein, 2007) permettant de reconstruire le tableau de permutation à partir de la cette permutation. Ceci prouvera que la fonction Ω est une bijection, mais auparavant, voici une définition et un lemme utiles à cette fin.

Définition 2.1.2. Soit deux parcours de $D(T)$ (ou de $G(T)$) contenant la case x . On dit que les deux parcours se **traversent** en x si aucun des deux parcours ne contient de trait τ tel que $f(\tau) = x$ ou $d(\tau) = x$.

Notons que la case x doit nécessairement être vide pour que deux parcours p_1 et p_2 s'y traversent. En effet, supposons que le trait τ de p_1 soit celui contenant la case x , alors si x est pointée, par définition du trait, il faut que $f(\tau) = x$ ou $d(\tau) = x$.

Lemme 2.1.3. *Deux parcours de $D(T)$ (ou de $G(T)$) se traversent au plus une fois. Le cas échéant, cela se produit dans dans le tracé initial d'au moins un des deux parcours.*

Démonstration. Supposons que les deux parcours p_1 et p_2 de $D(T)$ (ou de $G(T)$) se traversent à la case vide x et que x ne fasse partie d'aucun des deux tracés initiaux $i(p_1)$ et $i(p_2)$, alors les traits de p_1 et de p_2 contenant x font partie des zigzag $z(p_1)$ et $z(p_2)$ de p_1 et de p_2 . Par conséquent, un des deux parcours possède un trait nord μ_n contenant x et l'autre un trait est μ_e contenant x . Comme μ_n et μ_e sont des traits de zigzags, $d(\mu_n)$ et (μ_e) sont des cases pointées. La case x est donc bornée à l'ouest et au sud. Par la seconde règle des tableaux de permutation, la case x doit être pointée. Comme deux parcours ne peuvent se traverser en une case pointée, on a une contradiction.

Ainsi, si deux parcours se traversent en x , alors x doit être dans le tracé initial d'au moins un des deux parcours. Il y a trois possibilités :

- $x \in i(p_1) \cap i(p_2)$
- $x \in i(p_1) \cap z(p_2)$
- $x \in z(p_1) \cap i(p_2)$

Dans le premier cas, x est clairement unique, car $i(p_1) \neq i(p_2)$. Dans les deux autres cas, un zigzag d'un des deux parcours ne peut traverser le tracé initial de l'autre qu'une fois. □

Le lemme technique suivant permet de décrire l'algorithme 2.1.1 trouvé par Burstein et décrit à la page 22 reconstruisant l'unique tableau de permutation envoyé sur une permutation π par la fonction Ω définie à la page 19, en reconstruisant chacune de ses colonnes. Ceci permet de démontrer la bijectivité de Ω . Avant de le décrire, définissons le « retrait » de la première colonne d'un tableau de permutation. Rappelons que le remplissage r d'un tableau $T = (t, k, n)$ est la fonction $r : t \rightarrow \{0, 1\}$ qui associe à chaque case x de t la valeur 0 si la case est vide et 1 si elle est pointée.

Définition 2.1.3. Soit T un tableau de permutation de forme $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ et de remplissage r . Le **retrait** de la première colonne de T consiste à construire un nouveau tableau de permutation T' de forme $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_k - 1)$ et de remplissage r' tel que $r'(x, y) = r(x + 1, y)$.

Notons que l'index de T' est le même que celui de T , donc l'étiquette n de la

première colonne de T est l'étiquette d'une ligne de T' ne contenant que des cases fantômes et est un point fixe de $\Omega(T')$ du même coup.

Rappelons que la T -coordonnée $(a, b)_T$ d'un tableau de permutation T est la case à l'intersection de la ligne étiquetée a et de la colonne étiquetée b .

Lemme 2.1.4. *Soit $\pi = \Omega(T)$, et supposons que $\pi(n) < n$. Supposons que les points situés dans la colonne étiquetée par n (la première colonne de T) soient situés dans les lignes étiquetées par $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, que T' soit le tableau obtenu en retirant la première colonne de T et que $\Omega(T') = \pi'$. Alors*

- i) $\pi = \pi' \circ (a_1, a_2, \dots, a_r, n)$.
- ii) $\pi(n) < \pi(a_1) < \dots < \pi(a_r)$.
- iii) Pour tout i , la plus petite image plus grande que $\pi(a_i)$ est $\pi(a_{i+1})$

Démonstration. i) Les seuls indices de π influencés par le retrait de la première colonne (étiquetée par n) sont les a_j avec $1 \leq j \leq r$ et n . En effet, pour tout parcours p de $G(T)$ tel que $d(p) \in [n] \setminus \{a_1, \dots, a_r, n\}$, aucun trait τ de p n'est tel que $f(\tau)$ soit une case de la colonne n .

Soit le parcours $p := a_j \rightsquigarrow (a_j, n)_T \rightsquigarrow (a_{j+1}, n)_T \rightsquigarrow z \rightsquigarrow_* \pi(a_j)$ de $G(T)$ qui débute par un trait est, notons que la case z est la fin d'un trait est. On retire la première colonne de T et on considère le parcours $p' := a_{j+1} \rightsquigarrow z \rightsquigarrow_* \pi'(a_{j+1})$ de T' qui débute également par un trait est. L'image par π' de a_{j+1} est donc celle par π de a_j . Autrement dit,

$$\pi'(a_{j+1}) = \pi(a_j).$$

Un raisonnement similaire démontre que $\pi(n) = \pi'(a_1)$ et que $\pi(a_r) = \pi'(n)$.

ii) Soit les deux parcours $p_1 := a_i \rightsquigarrow (a_i, n)_T \rightsquigarrow (a_{i+1}, n)_T \rightsquigarrow_* \pi(a_i) = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ et $p_2 := a_{i+1} \rightsquigarrow (a_{i+1}, n)_T \rightsquigarrow (a_{i+2}, n)_T \rightsquigarrow_* \pi(a_{i+1}) = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ de $G(T)$. Les traits τ_3 et ρ_3 sont tous les deux des traits est et $d(\tau_3) = (a_{i+1}, n)_T$ et $d(\rho_3) = (a_{i+2}, n)_T$ sont

des cases de la première colonne. Comme deux zigzags ne se traversent jamais par la proposition 2.1.3, $\pi(a_i) < \pi(a_{i+1})$.

iii) Par construction, les a_i ne sont pas des points fixes de π . Soit l une ligne telle que $a_i < l < a_{i+1}$ et $p_{a_i} := a_i \rightsquigarrow_* \pi(a_i) = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ et $p_l := l \rightsquigarrow_* \pi(l) = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ deux parcours de $G(T)$. On a que τ_2 est un pas nord tel que $d(\tau_2) = (a_i, n)_T$, alors que ρ_2 est un pas nord tel que $d(\rho_2) = (l, y)_T$ avec $y < n$. Comme deux zigzags ne se traversent jamais, on a $\pi(l) < \pi(a_j)$. \square

Ce lemme facilite la description de l'algorithme 2.1.1 de Burstein. Il associe un unique tableau de permutation à une permutation. Plus précisément, il permet de retrouver les cases pointées de la première colonne du tableau de permutation T . Il suffit de réitérer la procédure sur le tableau T duquel on retire la première colonne pour obtenir la seconde colonne du tableau de permutation et ainsi de suite. On poursuit jusqu'à l'obtention du tableau de permutation en entier. Voici l'algorithme qui associe un tableau de permutation d'index n à une permutation de S_n . Une instance d'application de cet l'algorithme est présenté à l'exemple 2.1.1.

Algorithme 2.1.1. Soit π une permutation, trouvons $T = \Omega^{-1}(\pi)$.

- 1- On détermine la forme du tableau de permutation en déterminant les excédances de π , qui sont les étiquettes de ligne de T .
- 2- On détermine les valeurs $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ telles que $\pi(n) < \pi(a_1) < \dots < \pi(a_r)$ avec n le plus grand indice qui n'est pas un point fixe de π . Ensuite, on construit le cycle $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r, n)$.
- 3- On trace des points dans les cases de la première colonne de T , au lignes étiquetées a_1, a_2, \dots, a_r .
- 4- Si on a rempli toutes les colonnes de T , l'algorithme arrête.
- 5- On calcule $\pi' = \pi \circ \gamma^{-1}$.
- 6- On recommence à la l'étape 2, avec π' , pour trouver les points de la colonne suivante.

Fin de l'algorithme

Exemple 2.1.1. Déterminons quel est le tableau de permutation T tel que $\Omega(T) = 35824716$. La première étape consiste à trouver la forme du tableau en déterminant les excédances de π . Dans le cas présent, on trouve qu'elles sont 1, 2, 3 et 6, donc le tableau est de la forme suivante :

6				
3				
2				
1				
	8	7	5	4

On détermine ensuite les indices $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ tels que $\pi(n) < \pi(a_1) < \dots < \pi(a_r)$, puis on construit le cycle $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r, n)$. On a $\pi(n) = \pi(8) = 6$. Le premier indice d'image plus grande que 6 est 3, car $\pi(3) = 8$, donc $a_1 = 3$. Toutefois aucun indice plus grand que 3 ne possède une image plus grande que 8, donc il n'y a pas d'autre a_i . Le cycle $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r, n)$ se résume ici à $\gamma = (3, 8)$. La colonne de gauche du tableau de permutation T est :

6	
3	•
2	
1	
	8

On a

$$\underbrace{(1, 3, 8, 6, 7)(2, 5, 4)}_{\pi} \circ \underbrace{(3, 8)}_{\gamma^{-1}} = \underbrace{(1, 3, 6, 7)(2, 5, 4)}_{\pi'} = 35624718.$$

Le plus grand indice de π qui n'est pas un point fixe est 7 et $\pi(7) = 1$. Les valeurs des a_i sont 1, 2, 3 et 6, car $\pi(7) < \pi(1) < \pi(2) < \pi(3) < \pi(6)$. Ainsi, $\gamma' = (1, 2, 3, 6, 7)$ et la seconde colonne de T est

6	•
3	•
2	•
1	•
	7

On calcule ensuite

$$\underbrace{(1, 3, 6, 7)(2, 5, 4)}_{\pi'} \circ \underbrace{(1, 7, 6, 3, 2)}_{\gamma'^{-1}} = \underbrace{(2, 3, 5, 4)}_{\pi''} = 13524678.$$

On répète les étapes précédentes et on trouve le cycle $\gamma'' = (3, 5)$ et la 3^e colonne suivante

3	•
2	
1	
5	

On calcule maintenant $\pi''' :$

$$\underbrace{(2, 3, 5, 4)}_{\pi''} \circ \underbrace{(3, 5)}_{\gamma''^{-1}} = \underbrace{(2, 3, 4)}_{\pi'''} = 13425678.$$

Le dernier cycle trouvé est $\gamma^{(4)} = (2, 3, 4)$ et la dernière colonne est

3	•
2	•
1	
4	

On obtient enfin le tableau de permutation $T = \Omega^{-1}$, soit

6		•		
3	•	•	•	•
2		•		•
1		•		
	8	7	5	4

On a retrouvé le tableau de permutation envoyé sur π par Ω . Puisque la fonction Ω est inversible, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.5. *Les tableaux de permutation sont en bijection avec les permutations.*

Voici une liste exhaustive des tableaux de permutation associés aux permutations pour $n \leq 4$.

$n = 1$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1$

$n = 2$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 12$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 21$

$n = 3$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 123$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 213$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 231$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 132$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 321$ $\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 312$

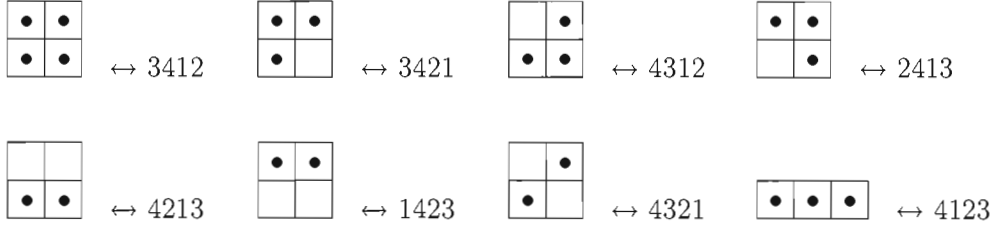
$n = 4$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1234$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 2134$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 2314$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1324$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 3214$ $\begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 3124$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 2341$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 2431$

$\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1342$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 3241$ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 4231$ $\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1243$

$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 1432$ $\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 3142$ $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 4132$ $\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 2143$



Le tableau 2.1 présente les polynômes $P_n(q)$ associés à n tels que l'exposant de q^u représente le nombre de tableaux de permutation d'index n ayant u points. Ces polynômes seront davantage exploités au chapitre 4.

	$P_n(q)$
$n = 1$	1
$n = 2$	$1 + q$
$n = 3$	$1 + 3q + 2q^2$
$n = 4$	$1 + 6q + 10q^2 + 6q^3 + q^4$

Tableau 2.1 Les polynômes $P_n(q)$.

2.2 Points essentiels et tableaux-vidés

On étudie ici l'ensemble des « tableaux-vidés », utile au développement d'une intéressante proposition aidant à relier entre-elles les différentes statistiques sur les permutations et celles sur les tableaux de permutation. De plus, un résultat reliant le nombre de cycles et le nombre d'excédances d'une permutation est démontré au chapitre 3 grâce à cet ensemble.

Rappelons qu'une case (x, y) d'un tableau T est bornée à l'ouest s'il existe une case pointée $(i, y) \in T$ telle que $i < x$ et bornée au sud s'il existe une case pointée $(x, j) \in T$ telle que $j < y$.

Définition 2.2.1. Une case d'un tableau de permutation T contient un **point essentiel latéral** si elle n'est pas bornée à l'ouest. Elle contient un **point essentiel inférieur** si

points non-essentiels de T . Pour toute case x de $v(T)$,

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ contient un point essentiel} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.2.2. Un **tableau-vidé** est un tableau de permutation duquel on retire tous les points non-essentiels. Plus formellement, un tableau-vidé $V = (t, k, n)$ est un triplet constitué d'un tableau t contenu dans un rectangle $k \times (n - k)$ selon deux contraintes :

- Toute colonne j de V contient au moins une case pointée.
- Toute case $(i, j) \in V$ bornée à l'ouest et au sud doit être vide.

Le premier tableau T de la figure 2.9 est un tableau de permutation, alors que le second est le tableau-vidé obtenu en retirant les points non-essentiels de T .

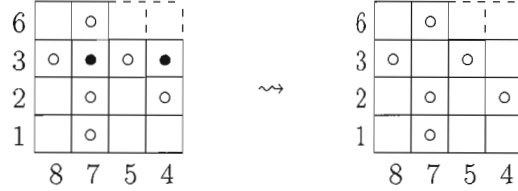


Figure 2.9 Tableau de permutation T et tableau-vidé $V = v(T)$.

2.3 Bijection entre tableaux de permutation et tableaux-vidés

Il est facile de passer d'un tableau de permutation à un tableau-vidé à l'aide de la fonction v . Toutefois, soit $\Omega_v = \Omega \circ v$, alors $\Omega(T) \neq \Omega_v(T)$. On introduit l'algorithme J construisant une bijection directe entre $\Omega_v^{-1}(\pi)$ et $\Omega^{-1}(\pi)$. Autrement dit, on met en bijection tableaux de permutation et tableaux-vidés de façon à ce que les permutations qui leur sont associées par Ω soient les mêmes. Cette construction du présent auteur répond à une question apparemment ouverte telle qu'énoncée par Burstein dans (Burstein, 2007).

Rappelons qu'un remplissage r d'un tableau $T = (t, k, n)$ est une fonction qui envoie chaque case x de t sur 1 ou sur 0 de façon à ce que $r(x) = 1$ si x est pointée et $r(x) = 0$ sinon. Considérons la case $x = (x_1, x_2)$ du tableau de permutation T .

- La **borne ouest** x_o de x est la case (o, x_2) telle que

$$o = \max\{i \mid i < x_1 \text{ et } r(i, x_2) = 1\}.$$
- La **borne est** x_e de x est la case (e, x_2) telle que

$$e = \min\{i \mid i > x_1 \text{ et } r(i, x_2) = 1\}.$$
- La **borne nord** x_n de x est la case (x_1, n) telle que

$$n = \min\{j \mid j > x_2 \text{ et } r(x_1, j) = 1\}.$$
- La **borne sud** x_s de x est la case (x_1, s) telle que

$$s = \max\{j \mid j < x_2 \text{ et } r(x_1, j) = 1\}.$$

Par exemple, dans le tableau de la figure 2.10, $(3, 4)_o = (1, 4)$, $(1, 1)_n = (1, 2)$ et $(4, 2)_s$ n'existe pas car $(4, 2)$ n'est pas bornée au sud.

On introduit également les **déphasements** nord-est et sud-ouest d'une case x , notés respectivement x_{ne} et x_{so} . Le déphasement x_{ne} est la case à l'intersection de la ligne contenant x_n et de la colonne contenant x_e et le déphasement x_{so} est la case à l'intersection de la ligne contenant x_s et de la colonne contenant x_o . Notons qu'il n'importe pas que x_{ne} ou que x_{so} soit pointée ou non. Par exemple, dans le tableau de la figure 2.10, le déphasement sud-ouest de la case $(3, 4)$ est la case $(1, 1)$.

Soit le tracé (voir page 16) $x \rightsquigarrow_* x_s \rightsquigarrow_* x_{so} \rightsquigarrow_* x_o \rightsquigarrow_* x$. On appelle **vortex** de x l'ensemble des cases contenues dans ce tracé. Une case (x, y) est dite à l'**intérieur** d'un vortex s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que $(x - a, y)$, $(x + b, y)$, $(x, y - c)$ et $(x, y + d)$ soient des cases de ce vortex. On appelle **pépin** du vortex de x toute case pointée du vortex autre que x , x_s , x_{so} ou x_o . On dit que le pépin est **vertical** s'il se situe dans le tracé $x_{so} \rightsquigarrow_* x_o$ et **horizontal** s'il se situe dans le tracé $x_s \rightsquigarrow_* x_{so}$. Par exemple, à la figure 2.10, le rectangle illustré détermine le vortex de $(3, 4)$. Les cases $(2, 2)$ et $(2, 3)$ sont à l'intérieur de ce vortex et la case $(1, 2)$ en est l'unique pépin vertical.

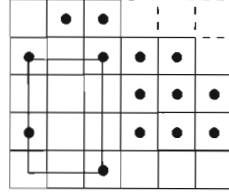


Figure 2.10 Vortex d'une case.

Enfin, **dépolariser** une case x revient à modifier la remplissage de x . Autrement dit, si x est pointée, elle devient vide et vice-versa. Voici maintenant l'algorithme J qui transforme un tableau de permutation en tableau-vidé de façon à ce que leurs images respectives par la fonction Ω soient les mêmes.

Algorithme J. On balaie premièrement les colonnes de droite à gauche, en balayant les cases de chaque colonne de haut en bas selon l'algorithme suivant. Une instance d'application de cet algorithme est présenté à la figure 2.15 :

- 1 - On balaye jusqu'à la première case pointée bornée au sud et à l'ouest. S'il n'existe aucune telle case, on arrête l'algorithme.
- 2 - Si le vortex de x ne possède aucun pépin, on dépolarise les deux cases x_{so} et x , puis on retourne à l'étape 1.

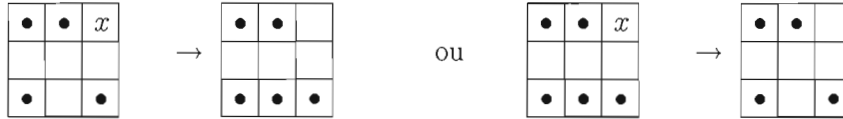


Figure 2.11 Étape 2 de J pour la case $x = (3, 3)$.

- 3 - Si aucun pépin du vortex de $x = (i, j)$ n'est simultanément borné à l'est et au nord, on dépolarise x et x_{so} . De plus, pour tout pépin vertical $b = (b_1, b_2)$, on dépolariser b et la case (i, b_2) et, pour tout pépin horizontal $c = (c_1, c_2)$, on dépolarise c et (c_1, j) . On retourne à l'étape 1.
- 4 - Si le vortex de x possède des pépins verticaux bornés à l'est, on dépolarise b et b_{ne} , avec b étant le pépin borné à l'est ayant la plus grande coordonnées « verticale ». Après, on retourne à l'étape 1.

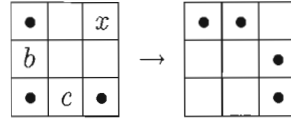


Figure 2.12 Étape 3 de J pour la case $x = (3, 3)$.

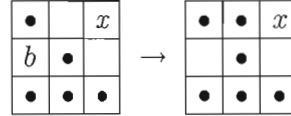


Figure 2.13 Étape 4 de J .

- 5 - Si le vortex de x possède des pépins horizontaux bornés au nord, on dépolairise c et c_{ne} avec c le pépin borné au nord ayant la plus grande coordonnée « horizontale ». Après, on retourne à l'étape 1.

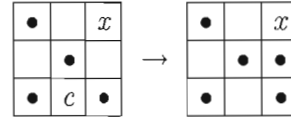


Figure 2.14 Étape 5 de J .

Fin de l'algorithme J

L'algorithme envoie chaque tableau de permutation sur un tableau-vidé. En effet, comme chaque colonne possède initialement au moins une case pointée et que les seules étapes « vidant » une case pointée nécessitent qu'elle soit bornée au sud (étapes 2 et 3) ou bornée au nord (étapes 4 et 5), il est impossible d'obtenir une colonne sans case pointée.

Le tableau obtenu satisfait également à la seconde contrainte des tableau-vidés, à savoir que toute case bornée au sud et à l'ouest est nécessairement vide. En effet, dès qu'on trouve une case pointée bornée au sud et à l'ouest, l'algorithme la dépolairise et l'approche systématique assure qu'aucune n'est omise. Les seules étapes qui ajoutent un point dans une case déjà balayée sont les étapes 4 et 5, mais comme on balaye le tableau

à nouveau après cette étape, le point ajouté est traité subséquentement en temps et lieu et n'échappe pas à l'algorithme.

Le tableau obtenu est bien un tableau-vidé et on peut à loisir distinguer les points doublement essentiels des points essentiels. De plus, on peut vérifier que les étapes 2, 3, 4 et 5 préservent les permutations associées aux tableaux par Ω , ce qui assure que la permutation associée au tableau de permutation initial par Ω est la même que celle associée au tableau-vidé final par $\Omega = \Omega_v$.

La construction inverse, pour passer d'un tableau-vidé à un tableau de permutation, est identique à l'algorithme J , à une exception près : à l'étape 1, plutôt que de considérer les cases contenant un point bornées à l'ouest et au sud, il faut considérer les cases vides ainsi bornées. Par le même raisonnement que précédemment, l'image par cette construction est unique et constitue un tableau de permutation. De plus, puisque la permutation associée n'est jamais modifiée, cette construction est J^{-1} . Puisque J est inversible, on a une bijection directe entre $\Omega_v^{-1}(\pi)$ et $\Omega^{-1}(\pi)$.

Exemple 2.3.1. La figure 2.15 illustre une instance d'application de l'algorithme J . Le tableau de permutation de départ et le tableau-vidé d'arrivée sont tous les deux envoyés sur la permutation

$$(1, 5, 11, 8, 10, 7, 4, 2, 9)(3, 6)$$

par la fonction Ω .

Les tableaux de permutation et les tableaux-vidés sont utilisés au chapitre 3 pour traduire plusieurs statistiques sur les permutations en terme de statistiques sur les tableaux.

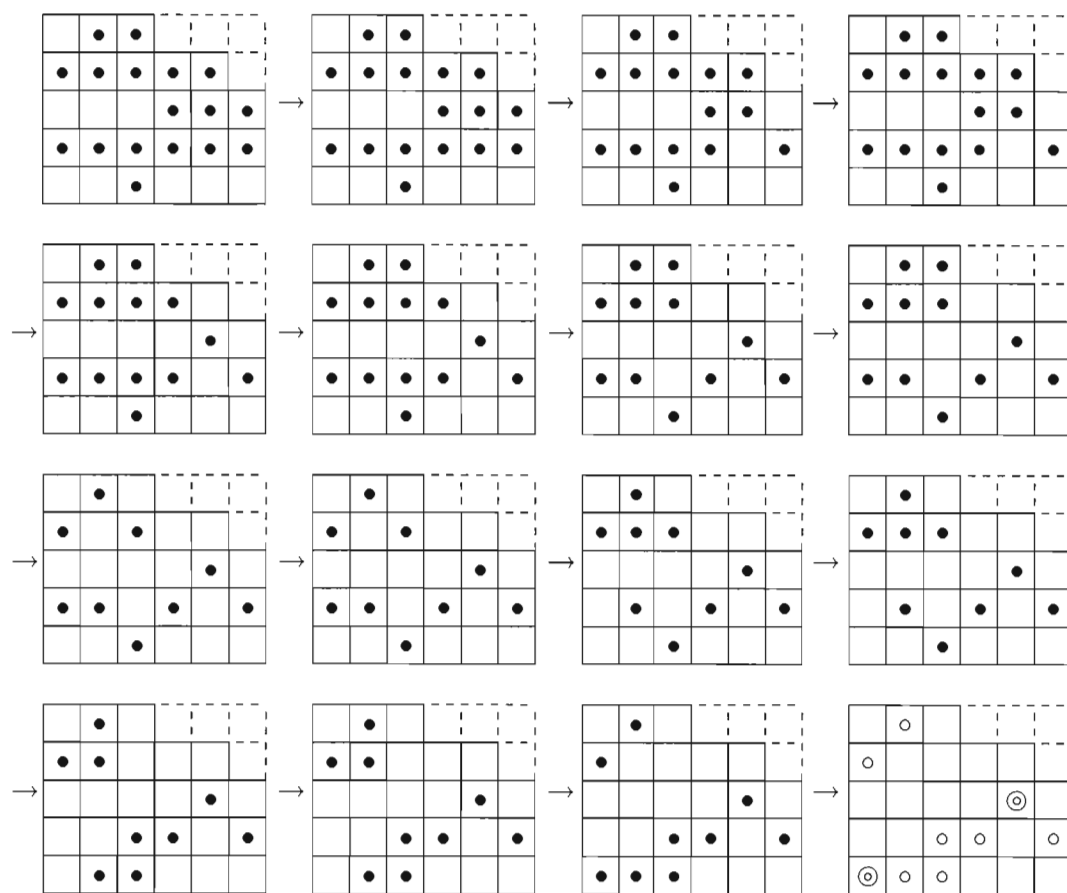


Figure 2.15 Instance d'application de l'algorithme J .

CHAPITRE III

TRADUCTION DES STATISTIQUES EN TERME DE TABLEAUX

On s'est familiarisé avec plusieurs statistiques sur les permutations au chapitre 1. Ici, on voit comment les traduire en terme de statistiques sur les tableaux de permutation, notamment en terme de nombre de cases vides, pointées, etc. L'objectif consiste à voir dans les tableaux de permutation un outil permettant de mieux comprendre les permutations. Les principales propositions du présent chapitre permettent d'énumérer les permutations selon l'occurrence d'un certain motif et ouvrent la porte à d'autres résultats similaires.

3.1 Croisements et alignements en terme de tableaux

Les statistiques de croisements et d'alignements se traduisent élégamment en terme de tableaux de permutation. La prochaine proposition, prouvée par Steingrímsson et Williams nécessite le rappel de la définition suivante.

$$A_{\downarrow\uparrow}(\pi) = |\{(i, j) \mid \pi(i) < i < j \leq \pi(j)\}|$$

Proposition 3.1.1. *Soit T un tableau de permutation et $\pi = \Omega(T)$. Le nombre $c(T)$ de cases fantômes de T est déterminé selon la relation :*

$$c(T) = A_{\downarrow\uparrow}(\pi) \tag{3.1}$$

Démonstration. Soit $(a, b)_T$ une case fantôme de T , alors $a > b$. Comme les étiquettes des lignes du tableau de permutation sont des excédances de la permutation π et que

celles des colonnes sont des non-excédances de π , on a que $\pi(a) \geq a$ et que $\pi(b) < b$. On a donc $\pi(b) < b < a \leq \pi(a)$, donc à chaque case fantôme de T , on peut associer un alignement $A_{\uparrow\uparrow}$ de π . Par l'argument inverse, on montre que tout alignement $A_{\uparrow\uparrow}$ de π se traduit par une case fantôme de T . \square

Voici un lemme et une proposition menant au dénombrement des cases vides d'un tableau de permutation. Ces résultats sont utilisés dans le corollaire 3.2.4. Rappelons toutefois la définition des trois statistiques suivantes sur une permutation π (voir p.9) :

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow}(\pi) &= |\{(i, j) \mid i < j \leq \pi(j) < \pi(i)\}| \\ A_{\downarrow\downarrow}(\pi) &= |\{(i, j) \mid \pi(j) < \pi(i) < i < j\}| \\ A_{\uparrow\downarrow}(\pi) &= |\{(i, j) \mid i \leq \pi(i) < \pi(j) < j\}| \end{aligned}$$

Lemme 3.1.2. *Une case x de T est vide si et seulement si deux parcours de $G(T)$ se traversent en x .*

Proposition 3.1.3. (Burstein, 2007) *Soit T un tableau de permutation et $\pi = \Omega(T)$, alors le nombre $a(T)$ de cases vides de T est déterminé selon la relation :*

$$a(T) = A_{\uparrow\uparrow}(\pi) + A_{\downarrow\downarrow}(\pi) + A_{\uparrow\downarrow}(\pi). \quad (3.2)$$

Démonstration. Par le lemme 3.1.2, on sait que pour toute case vide x , deux parcours p_1 et p_2 de $G(T)$ se traversent en x . Un des parcours, disons $p_1 := i \rightsquigarrow \pi(i) = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ possède un trait est τ_s contenant x tel que $d(\tau_s) \neq x$ et $f(\tau_s) \neq x$. Le second parcours $p_2 := j \rightsquigarrow \pi(j) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, possède un trait nord α_h contenant x tel que $d(\alpha_s) \neq x$ et $f(\alpha_s) \neq x$. On sait qu'un des deux parcours doit être dans son tracé initial par le lemme 2.1.3, donc il est impossible que i soit une non-excédance en même temps que j soit une excédance. Les trois autres cas sont envisageables, à savoir que i soit une excédance et j une non-excédance, que i et j soient deux excédances, où enfin que i et j soient deux non-excédances. Un exemple de ces trois possibilités est présenté à la figure 3.1.

Lorsque i est une excédance et j une non-excédance, on a $i \leq \pi(i) < \pi(j) < j$. Lorsqu'elles sont deux excédances, on a $j < i \leq \pi(i) < \pi(j)$. Enfin, lorsqu'elles sont deux non-excédances, on a $\pi(i) < \pi(j) < j < i$.

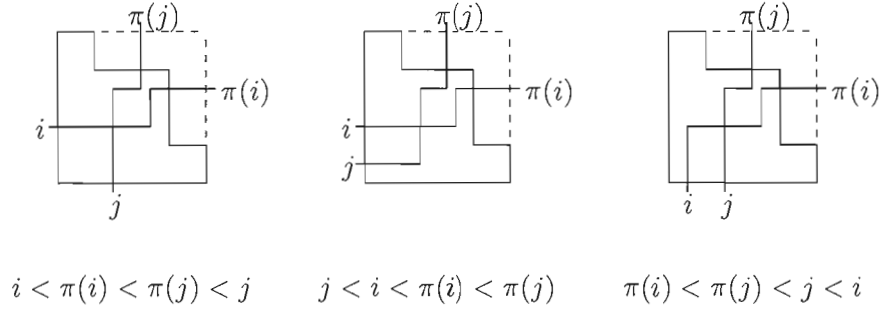


Figure 3.1 Trois cas dans lesquels deux parcours se traversent.

Il en découle que le nombre d'occurrences de tels croisements sont aux nombres de $A_{\uparrow\uparrow}(\pi)$, $A_{\downarrow\downarrow}(\pi)$ et $A_{\uparrow\downarrow}(\pi)$ respectivement. Enfin, par le lemme 3.1.2, on a que toutes les cases vides possèdent un croisement, donc le nombre de cases vides est égal à $A_{\uparrow\uparrow}(\pi) + A_{\downarrow\downarrow}(\pi) + A_{\uparrow\downarrow}(\pi)$. \square

Exemple 3.1.1. Soit le tableau de permutation T suivant dans lequel on dénote les quatre cases vides par a , b , c et d .

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 5 & \bullet & \bullet & \\
 3 & & & \bullet \\
 1 & \bullet & & \bullet \\
 \hline
 & 7 & 6 & 4 \quad 2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c|c|c|c|}
 5 & \bullet & \bullet & \\
 3 & a & b & \bullet \\
 1 & \bullet & c & d \quad \bullet \\
 \hline
 & 7 & 6 & 4 \quad 2
 \end{array}$$

Les parcours $1 \rightsquigarrow 6$ et $3 \rightsquigarrow 4$ se traversent en a , $3 \rightsquigarrow 4$ et $6 \rightsquigarrow 5$ se traversent en b , $6 \rightsquigarrow 5$ et $7 \rightsquigarrow 2$ se traversent en c et $4 \rightsquigarrow 3$ et $7 \rightsquigarrow 2$ se traversent en d . Les deux composantes du couple $(1, 3)$ sont deux excédances de $\Omega(T)$, celles de $(6, 7)$ sont une excédance et une non-excédance, alors que celles de $(6, 7)$ et de $(4, 7)$ sont des non-excédances. On vérifie que les quatres paires de parcours données correspondent respectivement à un alignement $A_{\uparrow\uparrow}$, à un alignement $A_{\uparrow\downarrow}$ et à deux alignements $A_{\downarrow\downarrow}$ de π . De plus, ce sont les seuls alignements $A_{\uparrow\uparrow}$, $A_{\uparrow\downarrow}$ et $A_{\downarrow\downarrow}$ de π .

3.2 Cycles, excédances et tableaux-vidés

Un résultat de Steingrímsson et Williams reliant le nombre de cycles et le nombre d'excédances d'une permutation est démontré ici grâce aux tableaux-vidés. On commence toutefois par quelques définitions et lemmes.

Commençons par rappeler ce que sont les croisements $C_{\uparrow\uparrow}$ et $C_{\downarrow\downarrow}$ d'une permutation π . Les croisements $C_{\uparrow\uparrow}$ sont les couples (i, j) tels que $i < j \leq \pi(i) < \pi(j)$, alors que les croisements $C_{\downarrow\downarrow}$ sont les couples (i, j) tels que $\pi(i) < \pi(j) < i < j$.

Note. Soit T un tableau de permutation et p_1 et p_2 deux parcours de $D(T)$ ou de $G(T)$. On dit que le couple (p_1, p_2) est un croisement ou un alignement x de $\Omega(T)$ si $(d(p_1), d(p_2))$ est un tel croisement ou un alignement de $\Omega(T)$.

Lemme 3.2.1. *Soit T un tableau de permutation et p_1 et p_2 deux parcours de $D(T)$ tels que (p_1, p_2) soit un croisement de $\Omega(T)$. L'intersection de p_1 et de p_2 contient toutes les cases d'un et un seul trait de p_1 .*

Démonstration. On analyse seulement les paires de parcours (p_1, p_2) qui sont des croisements $C_{\uparrow\uparrow}$ de $\Omega(T)$, mais le raisonnement est similaire pour les paires étant des croisements $C_{\downarrow\downarrow}$. Soit $p_1 := i \rightsquigarrow_* \pi(i) = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ et $p_2 := j \rightsquigarrow_* \pi(j) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ deux parcours de $D(T)$ tels que $i < j$. Puisque (p_1, p_2) est un croisement $C_{\uparrow\uparrow}$, i et j sont toutes les deux des excédances de $\Omega(T)$. Les traits τ_1 et α_1 sont donc des traits ouest.

Soit g la plus petite valeur telle que le trait τ_g contienne une case de $p_1 \cap p_2$. Puisque $i < j$ et que p_1 et p_2 sont des excédances de $\Omega(T)$, il faut nécessairement que x appartienne au zigzag de p_1 . Toutefois, par un raisonnement identique au lemme 2.1.3 (voir page 19), il faut également que x soit dans le tracé initial d'un des deux trajets, car l'intersection de deux zigzag ne peut être un trait complet. Ainsi, $x \in i(p_2)$.

Si τ_g est un trait est, alors $\tau_g \in p_2$. En effet, puisque x est dans $i(p_2)$, $d(\tau_g)$ et $f(\tau_g)$ y sont aussi, car toutes les cases pointées de la ligne étiquetée j sont dans $i(p_2)$. Si τ_g est un trait nord, alors $x = f(\tau_g)$ et x est une case pointée. Le trait est τ_{g+1} de p_1 est

par conséquent entièrement dans p_2 . Par la suite, l'intersection de deux zigzags $z(p_1)$ et $z(p_2)$ ne peut contenir plus d'une case d'un même trait par la construction même des zigzags.

Dans le cas des trajets représentant des croisements $C_{\downarrow\downarrow}$, c'est un trait nord qui fait entièrement partie de l'intersection de p_1 et de p_2 . \square

La figure 3.2 donne un exemple d'intersection de deux parcours p_1 et p_2 de $D(T)$ tels que (p_1, p_2) soit un croisement $C_{\uparrow\uparrow}$ de $\Omega(T)$.

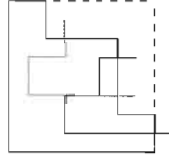


Figure 3.2 Intersection de deux parcours de $D(T)$.

On peut maintenant aborder la proposition suivante dénombrant les points non-essentiels inférieurs.

Proposition 3.2.2. *Soit T un tableau de permutation et $\pi = \Omega(T)$, alors le nombre de points non-essentiels inférieurs de T est égal au nombre de croisements de π .*

Démonstration. Soit p_1 et p_2 deux parcours de $D(T)$ tels que (p_1, p_2) soit un croisement $C_{\uparrow\uparrow}$ dans π . Par le lemme 3.2.1, le trait est $\tau_g \in p_1$ est dans l'intersection $p_1 \cap p_2$. Posons $x = d(\tau_g)$. Le trait nord τ_{g-1} du zigzag $z(p_1)$ est tel que $f(\tau_g) = x$ et $d(\tau_{g-1})$ est une case pointée, donc x est bornée au sud. Ainsi, le point de la case x est un point non-essentiel inférieur. De la même façon, si (p_1, p_2) est un croisement $C_{\downarrow\downarrow}$, alors $p_1 \cap p_2$ contient un trait nord τ_h de p_1 . Soit $y = d(\tau_h)$ et $w = f(\tau_h)$. La case pointée w est bornée au sud par y , donc w contient un point non-essentiel. À chaque croisement, on associe donc un point non-essentiel inférieur.

À l'inverse, soit x une case contenant un point non-essentiel inférieur de T , alors il existe un parcours $p_1 := i \rightsquigarrow_* \pi(i) = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ de $D(T)$ qui contient un trait nord τ_{g-1} et un trait est τ_g tels que $x = f(\tau_{g-1}) = d(\tau_g)$. Si i est une excédance, alors on considère l'unique parcours $p_2 := j \rightsquigarrow_* \pi(j) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de $D(T)$ qui contient un trait ouest α_b tel que $f(\alpha_b) = x$. On a que j est nécessairement une excédance de π , car le parcours p_2 contient un trait ouest. Par construction, $\pi(i) < \pi(j)$, donc $i < j \leq \pi(i) < \pi(j)$. Ceci est équivalent à dire que (p_1, p_2) est un croisement $C_{\uparrow\uparrow}$ de π . Un raisonnement similaire nous démontre que lorsque i est une non-excédance, alors (p_1, p_2) est un croisement $C_{\downarrow\downarrow}$ de π . \square

Sachant que tout tableau de permutation possède $(n-k)$ points essentiels-inférieurs, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, on trouve que le nombre $b(T)$ de cases pointées est lié au nombre de croisements par la relation :*

$$b(T) = C_{\uparrow\uparrow}(\pi) + C_{\downarrow\downarrow}(\pi) + (n - k) \quad (3.3)$$

Soit T un tableau de permutation, les équations 3.1, 3.2 et 3.3 permettent d'exprimer le nombre $c(T)$ de cases fantômes de T , le nombre $a(T)$ de cases vides de T et le nombre $b(T)$ des cases pointées de T , en terme d'alignements et de croisements de la permutation $\pi = \Omega(T)$. C'est ce qui est résumé dans le corollaire suivant prouvé par Steingrímsson et Williams :

Corollaire 3.2.4. *Soit $H(n, k, a(T), b(T), c(T))$ l'ensemble des tableaux de permutation T à k lignes, d'index n , $a(T)$ cases vides, $b(T)$ cases pointées et $c(T)$ cases fantômes. Soit $P(n, l, d, e, f)$ l'ensemble des permutations $\pi \in S_n$ telles que*

- l est le nombre d'excédances
- $d = A_{\uparrow\uparrow}(\pi) + A_{\downarrow\downarrow}(\pi) + A_{\uparrow\downarrow}(\pi)$
- $e = C_{\uparrow\uparrow}(\pi) + C_{\downarrow\downarrow}(\pi) + (n - k)$
- $f = A_{\downarrow\uparrow}(\pi)$

Alors $|H(n, k, a(T), b(T), c(T))| = |P(n, l, d, e, f)|$.

Exemple 3.2.1. Vérifions l'énoncé du corollaire 3.2.4 pour l'ensemble des tableaux de permutation à 2 lignes et 2 colonnes. Le classement des tableaux de permutation selon leur nombre $a(T)$ de cases vides, $b(T)$ de cases pointées et $c(T)$ de cases fantômes est donné dans le tableau 3.1. Notons qu'on indique seulement le nombre de cases vides et de cases pointées, car on sait que $a(T) + b(T) + c(T) = k \times (n - k)$. Ici, ce nombre est 4. Le classement des permutations de S_4 avec deux excédances selon l'occurrence d'alignements et de croisements est détaillé dans le tableau 3.2 et synthétisé dans le tableau 3.3.

	$b(T) = 2$	$b(T) = 3$	$b(T) = 4$
$a(T) = 0$	3124 	3142 	3412
$a(T) = 1$	4132 2143 	3421 4312 2413 	
$a(T) = 2$	4213 1423 4321 		

Tableau 3.1 Les tableaux de permutation à 2 lignes et d'index 4.

Comme nous l'indique le corollaire 3.2.4, les permutations présentées dans le tableau 3.3 coïncident exactement avec celles du tableau 3.1 classant les tableaux de permutation selon leur remplissage.

Les cycles sont la pierre angulaire d'une autre proposition intéressante traitant des points essentiels d'un tableau-vidé. Avant de la présenter, voici une proposition préalable.

Rappelons que pour un tableau-vidé V , $\odot(V)$ indique le nombre de points doublement essentiels de V . De plus, pour une permutation π , $\text{cyc}(\pi)$ représente le nombre de cycles de π . On peut maintenant énoncer la proposition suivante, prouvée par Burstein, reliant ces deux statistiques.

	$A_{\uparrow\uparrow}$	$A_{\downarrow\downarrow}$	$A_{\uparrow\downarrow}$	$A_{\downarrow\uparrow}$	$C_{\uparrow\uparrow}$	$C_{\downarrow\downarrow}$
3124				(2, 4), (3, 4)		
3142					(1, 3)	
3412					(1, 2)	(3, 4)
4132	(1, 3)			(2, 3)		
2143			(1, 4)	(2, 3)		
3421		(3, 4)			(1, 2)	
4312	(1, 2)					(3, 4)
2413			(1, 4)		(1, 2)	
4213	(1, 2)		(2, 4)			
1423			(1, 3), (1, 4)			
4321	(1, 2)	(3, 4)				

Tableau 3.2 Permutations de S_4 avec deux excédances.

	$C_{\uparrow\uparrow} + C_{\downarrow\downarrow} + 2 = 2$	$C_{\uparrow\uparrow} + C_{\downarrow\downarrow} + 2 = 3$	$C_{\uparrow\uparrow} + C_{\downarrow\downarrow} + 2 = 4$
$A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow} + A_{\uparrow\downarrow} = 0$	3124	3142	3412
$A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow} + A_{\uparrow\downarrow} = 1$	4132 et 2143	3421, 4312 et 2413	
$A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow} + A_{\uparrow\downarrow} = 2$	4213, 1423 et 4321		

Tableau 3.3 Les permutations de S_n selon les statistiques a , b et c .

Proposition 3.2.5. *Pour tout tableau-vidé V , la permutation $\Omega(V)$ contient autant de cycles que V contient de points doublement essentiels. Autrement dit,*

$$\odot(V) = \text{cyc}(\Omega(V))$$

Par exemple, soit le tableau-vidé V de la figure 3.3, on a $\pi = \Omega(V) = 46823715 = (1, 4, 2, 6, 7)(3, 8, 5)$. Comme attendu, le nombre de cycles de π est égal au nombre de points doublement essentiels.

Rapellons que $\text{fixe}(T)$ dénombre les lignes d'un tableau de permutation T sans case pointée. De plus, pour une permutation π , π^\uparrow dénote son nombre d'excédances. Les

6		○		---
3	⊙		○	
2		○		○
1		⊙		
	8	7	5	4

Figure 3.3 Tableau-vidé avec deux points doublement essentiels.

corollaires suivant prouvés par Burstein mettent en lien ces différentes statistiques sur les tableaux de permutation et sur les permutations.

Corollaire 3.2.6. *La bistatistique $(\odot(T), k)$ sur les tableaux de permutation T à k lignes, d'index n et sans ligne vide, possède la même distribution que la bistatistique $(\text{cyc}(\pi), \pi^\uparrow)$ sur les dérangements π dans S_n .*

En rappelant que l'étiquette de chaque ligne sans case pointée est un point fixe, on obtient la généralisation suivante :

Corollaire 3.2.7. *La bistatistique $(\odot(T) + \text{fixe}(T), k)$ sur les tableaux de permutation T d'index n possède la même distribution que la bistatistique $(\text{cyc}(\pi), \pi^\uparrow)$ sur les permutations $\pi \in S_n$.*

3.3 Motifs et tableaux de permutation

Les motifs de permutation apparaissent dans les tableaux de permutation d'une intéressante façon. Le principal résultat de cette section est le corollaire 3.3.1 démontré par Steingrímsson et Williams qui relie les motifs, les croisements et les alignements d'une permutation. Rappelons que $|D(\pi)|$ représente le nombre de descentes d'une permutation π , donc le nombre d'indices i tels que $\pi(i) > \pi(i+1)$.

Corollaire 3.3.1. *Soit $H(n, k, a(T), b(T), c(T))$ l'ensemble des tableaux de permutation T à k lignes, d'index n et avec $a(T)$ cases vides, $b(T)$ cases pointées et $c(T)$ cases*

fantômes. Soit de plus $P(n, h, d, e, f)$ l'ensemble des permutations π de S_n telles que :

$$\begin{aligned} h - 1 &= |D(\pi)| \\ d &= (31 \star 2)\pi + (21 \star 3)\pi + (3 \star 21)\pi - \binom{|D(\pi)|}{2} \\ e &= (2 \star 31)\pi + n - 1 - |D(\pi)| \\ f &= (1 \star 32)\pi + (32 \star 1)\pi - \binom{|D(\pi)|}{2} \end{aligned}$$

Alors $|H(n, k, a(T), b(T), c(T))| = |P(n, h, d, e, f)|$.

Par exemple, il y a 3 tableaux de permutation à 2 ligne et d'index 4 ayant 2 cases vides et 2 cases pointées, comme illustré au tableau 3.1 (voir page 41). Ce nombre coïncide avec le nombre de permutation de S_4 ayant 1 descente et telles que $d = 2$ et $f = 2$. Ces 3 permutations sont 2134, 3124 et 4123.

Ce corollaire est très intéressant, car il relie les tableaux de permutation à l'occurrence de motifs. Il est d'ailleurs la pierre angulaire du principal résultat du chapitre 4. Il permet à terme d'obtenir la distribution complète d'un motif de longueur plus grande que 2. Le tableau 3.4 rappelle les traductions de certaines statistiques sur les permutations en terme de statistiques sur les tableaux de permutation qui leurs sont associés.

Statistiques du tableau T	Statistiques de la permutation $\Omega(T)$
Nombre de lignes k	Nombre d'excédances
Nombre de colonnes $n - k$	Nombre de non-excédances
$c(T)$	$A_{\downarrow\uparrow}(\pi)$
$a(T)$	$A_{\uparrow\downarrow}(\pi) + A_{\uparrow\uparrow}(\pi) + A_{\downarrow\downarrow}(\pi)$
$b(T)$	$n - k + C_{\uparrow\uparrow}(\pi) + C_{\downarrow\downarrow}(\pi)$

Tableau 3.4 Statistiques des permutations liées aux tableaux.

Exemple 3.3.1. Soit T le tableau de permutation suivant,

•	•	•	•
		•	•

alors $\pi = \Omega(T) = 316245$ et le tableau 3.5 indique plusieurs statistiques de T .

Statistiques de T	Statistiques de la permutation $\Omega(T)$
$k = 2$	2 excédances : $1 \rightsquigarrow 3, 3 \rightsquigarrow 6$
$n - k = 4$	4 non-excédances : $2 \rightsquigarrow 1, 4 \rightsquigarrow 2, 5 \rightsquigarrow 4, 6 \rightsquigarrow 5$
$c(T) = 1$	$A_{\downarrow\uparrow}(\pi) = 1 : (2, 1)$
$a(T) = 2$	$A_{\uparrow\downarrow}(\pi) = 2 : (1, 5) \text{ et } (1, 6)$, $A_{\uparrow\uparrow}(\pi) = 0$, $A_{\downarrow\downarrow}(\pi) = 0$
$b(T) = 5$	$C_{\uparrow\uparrow}(\pi) = 1 : (1, 3)$, $C_{\downarrow\downarrow}(\pi) = 0$, donc $4 + 1 + 0 = 5$

Tableau 3.5 Statistiques de permutations liées aux tableaux T .

CHAPITRE IV

ÉNUMÉRATION DES TABLEAUX DE PERMUTATION SELON LEURS STATISTIQUES

On présente ici plusieurs polynômes énumérateurs dénombrant diverses statistiques sur les tableaux de permutation. On présente ensuite le principal résultat de ce texte : grâce à certains corollaires du chapitre 3 et à ces polynômes énumérateurs, Corteel et Williams sont parvenues à trouver la première expression polynomiale connue donnant la distribution complète d'un motif de permutation de longueur supérieure à 2.

4.1 Polynômes associés aux tableaux de permutation

Les deux polynômes énumérateurs qui nous intéressent particulièrement sont $F_\lambda(x)$ et $D_{k,n}(x)$. Le premier, appelé « polynôme de partage », énumère les tableaux de permutation T associés à un partage donné selon leurs nombres $a(T)$ de cases vides et $b(T)$ de cases pointées, alors que le second, nommé « polynôme de tableaux », tient également compte du nombre $c(T)$ de cases fantômes de T . Soit $T = (t, k, n)$ un tableau de permutation, alors notons $\eta(T)$ la forme de t , c'est à dire le partage associé à T .

Définition 4.1.1. Le **polynôme de partage** associé au partage λ est défini comme suit :

$$F_\lambda = F_\lambda(p, q) := \sum_{i,j} a_{ij}(\lambda) p^i q^j = \sum_{\eta(T)=\lambda} p^{a(T)} q^{b(T)},$$

la somme ayant lieu sur l'ensemble des tableaux de permutation T de forme λ . On a donc

que $a_{ij}(\lambda)$ est le nombre de tableaux de permutation de forme λ ayant i cases pointées et j cases vides.

Exemple 4.1.1. Soit $\lambda = (2, 2)$, alors on a $F_\lambda = 3p^2q^2 + 3pq^3 + q^4$, car on a 3 façons de répartir deux points et deux cases vides dans la forme λ . Il y a autant de façons d'y insérer trois points, mais seulement une de la remplir de points. Les différents cas sont présentés dans le tableau 4.1.








Monôme	Tableaux de permutation correspondants
p^2q^2	 = 1423  = 4213  = 4321
pq^3	 = 3421  = 2413  = 4312
q^4	 = 3412

Tableau 4.1 Monômes de $F_{(2,2)}$.

Soit le partage $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ et les trois partages $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$, $\beta = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_k - 1)$ et $\gamma = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k - 1)$. On note T_α , T_β et T_γ les trois tableaux de permutation de forme respective α , β et γ .

Proposition 4.1.1. (Steingrímsson et Williams, 2007) *Tout tableau de permutation non-nul T_λ de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est obtenu par « l'ajout » de cases d'un certain type au tableau de permutation T_α , T_β ou T_γ selon l'une des trois possibilités suivantes :*

1. À partir de T_α , on ajoute les λ_k cases vides $(1, k), (2, k), \dots, (\lambda_k, k)$ pour obtenir T_λ .
2. On construit le tableau de permutation T de forme λ . Soit r_b le remplissage de T_β ,

alors le remplissage r_1 de T est défini comme suit.

$$r_1(x, y) = \begin{cases} r_b(x, y) & \text{si } x \leq \lambda_k \\ r_b(x - 1, y) & \text{si } x > \lambda_{k+1} \\ 1 & \text{si } (x, y) = (\lambda_k, k) \\ 0 & \text{si } x = \lambda_k \text{ et } 1 \leq y < k \end{cases}$$

On obtient $T = T_\lambda$.

3. À partir de T_γ , on ajoute la case pointée (λ_k, k) pour obtenir T_λ .

Un exemple de chacune des trois possibilités de la proposition 4.1.1 est présenté à la figure 4.1. Chacune des cases contenant une lettre peut être vide ou pointée, tant que les propriétés des tableaux de permutation sont respectées.

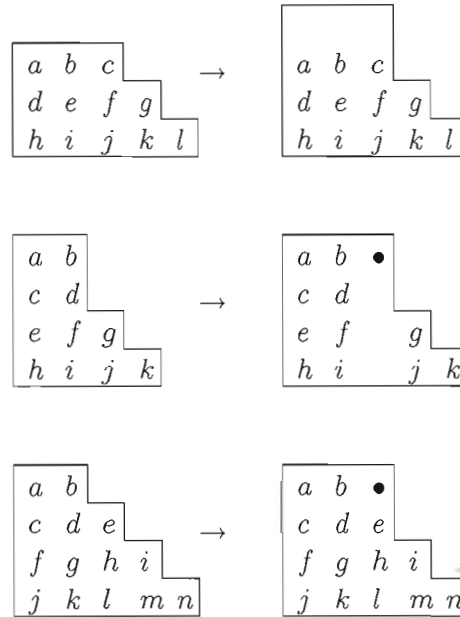


Figure 4.1 Les trois procédures de la proposition 4.1.1.

La figure 4.2 illustre un exemple de construction récursive d'un tableau de permutation à partir du tableau à une seule case et n'utilisant que les trois procédures décrites dans la proposition 4.1.1. Chacune de ces trois actions de la proposition 4.1.1 modifie

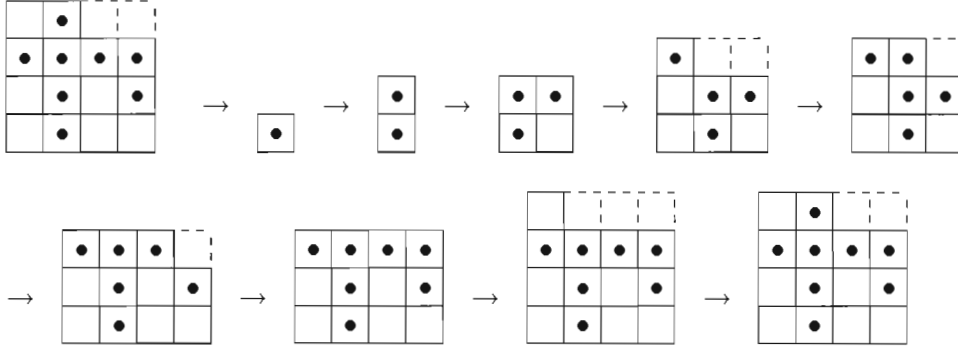


Figure 4.2 Exemple d'étapes pour obtenir un certain tableau de permutation.

le nombre $b(T)$ de points et le nombre $a(T)$ de cases vides du tableau de permutation initial T de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 a(T_\lambda) &= a(T_\alpha) + \lambda_k \\
 a(T_\lambda) &= a(T_\beta) + k - 1 \\
 b(T_\lambda) &= b(T_\beta) + 1 \\
 b(T_\lambda) &= b(T_\gamma) + 1
 \end{aligned}$$

Autrement dit, la première action ajoute λ_k cases vides, la seconde ajoute $k - 1$ cases vides et une seule pointée et la troisième action ajoute simplement une case pointée. Comme corollaire de la description récursive des tableaux de permutation donnée par la proposition 4.1.1, on peut exprimer récursivement F_λ .

Corollaire 4.1.2. (Steingrímsson et Williams, 2007) *Le polynôme $F_\lambda = F_\lambda(p, q)$ se calcule récursivement comme suit :*

$$F_\lambda = p^{\lambda_k} F_\alpha + p^{k-1} q F_\beta + q F_\gamma. \quad (4.1)$$

avec la condition initiale $F_\emptyset(p, q) = 1$.

En observant que, pour tout $b \in \mathbb{N}$, on a

$$F_{(b)}(p, q) = q^b, \quad (4.2)$$

on peut simplifier le calcul en remplaçant la condition initiale par les conditions 4.2.

Exemple 4.1.2. Calculons $F_{(2,2)}$ récursivement selon la récurrence 4.1. On obtient bien la même expression qu'à l'exemple 4.1.1 (voir page 48).

$$\begin{aligned}
F_{(2,2)} &= p^2 F_{(2)} + pq F_{(1,1)} + q F_{(2,1)} \\
&= p^2 q^2 \\
&\quad + pq(p F_{(1)} + pq F_{\emptyset} + q F_{(1)}) \\
&\quad + q(p F_{(2)} + pq F_{(1)} + q F_{(2)}) \\
&= p^2 q^2 + pq(pq + pq + q^2) + q(pq^2 + pq^2 + q^3) \\
&= 3p^2 q^2 + 3pq^3 + q^4.
\end{aligned}$$

Le tableau 4.2 affiche les premières valeurs de F_{λ} avec $\lambda \vdash n$. Notons qu'à des fins de clarté, on omet les virgules dans l'écriture des partages. Notons que $F_{\lambda}(1, 1) = F_{\lambda}$ et remarquons que ce polynôme calcule simplement le nombre de tableaux de permutation de forme λ . Ces nombres sont représentés dans le tableau 4.3.

On peut intégrer l'information associée au nombre de cases fantômes de T dans le polynôme $F_{\lambda}(p, q)$ en définissant le **polynôme de tableaux** :

$$D_{k,n} = D_{k,n}(p, q, r) := \sum_{\lambda} F_{\lambda}(p, q) r^{k(n-k)-|\lambda|},$$

où λ varie dans l'ensemble de tous les partages inclus dans le rectangle $k \times (n - k)$. L'exposant de r dénombre en fait le nombre $c(T)$ de cases fantômes de T . Le coefficient de $p^i q^j r^l$ dans $D_{k,n}$ est donc le nombre de tableaux de permutation T tels que $a(T) = i$, $b(T) = j$ et $c(T) = l$. Le tableau 4.4 présente les polynômes $D_{k,n}$ pour $1 \leq n \leq 5$.

Exemple 4.1.3. Pour les permutations à deux excédances et d'index $n = 4$ qui sont illustrées au chapitre 2. Il y a 3 partages possibles selon ces contraintes, à savoir (2) , $(2, 1)$ et $(2, 2)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
D_{2,4} &= (q^2) r^2 \\
&\quad + (2pq^2 + q^3) r \\
&\quad + (3p^2 q^2 + 3pq^3 + q^4) \\
&= q^2 r^2 + 2pq^2 r + q^3 r + 3p^2 q^2 + 3pq^3 + q^4.
\end{aligned}$$

$n = 0$	$F_{\emptyset} = 1$	$n = 1$	$F_{(1)} = q$
$n = 2$	$F_{(2)} = q^2$ $F_{(11)} = 2pq + q^2$	$n = 3$	$F_{(3)} = q^3$ $F_{(21)} = 2pq^2 + q^3$ $F_{(111)} = 3p^2q + 3pq^2 + q^3$
$n = 4$	$F_{(4)} = q^4$ $F_{(31)} = 2pq^3 + q^4$ $F_{(22)} = 3p^2q^2 + 3pq^3 + q^4$ $F_{(211)} = 3p^2q^2 + 3pq^3 + q^4$ $F_{(1111)} = 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$		
$n = 5$	$F_{(5)} = q^5$ $F_{(41)} = 2pq^4 + q^5$ $F_{(32)} = 3p^2q^3 + 3pq^4 + q^5$ $F_{(311)} = 3p^2q^3 + 3pq^4 + q^5$ $F_{(221)} = 5p^3q^2 + 7p^2q^3 + 4pq^4 + q^5$ $F_{(2111)} = 4p^3q^2 + 6p^2q^3 + 4pq^4 + q^5$ $F_{(11111)} = 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$		

Tableau 4.2 Premières valeurs de $F_{\lambda} = F_{\lambda}(p, q)$ avec λ partage de n .

En rappelant que $\Omega^{-1}(\pi)$ est le tableau de permutation associé à π , on note qu'en fixant $r = 1$ dans $D_{k,n}(p, q, r)$ on obtient

$$\sum_{k=1}^n D_{k,n}(p, q, 1) = \sum_{\lambda} F_{\lambda} = \sum_{\sigma \in S_n} p^{z(\Omega^{-1}(\sigma))} q^{u(\Omega^{-1}(\sigma))}.$$

avec λ variant dans l'ensemble de tous les partages inclus dans le rectangle $k \times (n - k)$.

Il en découle que

$$\sum_{\lambda} F_{\lambda}(1, 1) = \sum_{\sigma \in S_n} 1 = n!.$$

Le principal résultat de dénombrement relié aux tableaux de permutation apparaît lorsqu'on spécialise $D_{k,n}$ en posant $p = r = 1$. Le polynôme $D_{k,n}(1, q, 1)$ ne tient donc compte que du nombre de points dans les rectangles de dimension $k \times (n - k)$. Le tableau

$n = 0$	$F_{\emptyset} = 1$	$n = 1$	$F_{(1)} = 1$	$n = 2$	$F_{(2)} = 1$ $F_{(11)} = 3$
$n = 3$	$F_{(3)} = 1$ $F_{(21)} = 3$ $F_{(111)} = 7$	$n = 4$	$F_{(4)} = 1$ $F_{(31)} = 3$ $F_{(22)} = 7$ $F_{(211)} = 7$ $F_{(1111)} = 15$	$n = 5$	$F_{(5)} = 1$ $F_{(41)} = 3$ $F_{(32)} = 7$ $F_{(311)} = 7$ $F_{(221)} = 17$ $F_{(2111)} = 15$ $F_{(11111)} = 31$

Tableau 4.3 Premières valeurs de $F_{\lambda}(1, 1)$ avec λ partage de n .

4.5 fournit les premières valeurs de $D_{k,n}(1, q, 1)$ pour pour $1 \leq n \leq 5$. Afin de décrire une expression pour $D_{k,n}(1, q, 1)$, rappelons la définition suivante des « q -analogues ».

Définition 4.1.2. On note $[i]_q$ le q -analogue d'une valeur i comme la valeur

$$[i]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1}.$$

La proposition 4.1.3, prouvée Steingrímsson et Williams donne l'expression suivante pour $D_{k,n}(1, q, 1)$.

Proposition 4.1.3.

$$D_{k,n}(1, q, 1) = q^{n-k^2} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [k-i]_q^n q^{ki-k} \left(\binom{n}{i} q^{k-i} + \binom{n}{i-1} \right)$$

où $[k-i]_q$ est le q -analogue de $k-i$.

Notons que $D_{k,n}(1, 1, 1)$ dénombre simplement les tableaux de permutation à k lignes et d'index n . Les premières valeurs de $D_{k,n}(1, 1, 1)$ sont données au tableau 4.6. On remarque que les nombres de ce tableau sont en fait essentiellement les nombres

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k = 1$	1	q	q^2	q^3
$k = 2$		1	$2pq + q^2 + qr$	$3p^2q^2 + 3pq^3 + 2pq^2r + q^4 + q^3r + q^2r^2$
$k = 3$			1	$3p^2q + 3pq^2 + 2pqr + q^3 + q^2r + qr^2$
$k = 4$				1
	$n = 5$			
$k = 1$	q^4			
$k = 2$	$4p^3q^3 + 6p^2q^4 + 3p^2q^3r + 4pq^5 + 3pq^4r + 2pq^3r^2 + q^6 + q^5r + q^4r^2 + q^3r^3$			
$k = 3$	$6p^4q^2 + 11p^3q^3 + 5p^3q^2r + 9p^2q^4 + 7p^2q^3r + 6p^2q^2r^2 + 4pq^5 + 4pq^4r + 6pq^3r^2 + 2pq^2r^3 + q^6 + q^5r + 2q^4r^2 + q^3r^3 + q^2r^4$			
$k = 4$	$4p^3q + 6p^2q^2 + 3p^2qr + 4pq^3 + 3pq^2r + 2pqr^2 + q^4 + q^3r + q^2r^2 + qr^3$			
$k = 5$	1			

Tableau 4.4 $D_{k,n} = D_{k,n}(p, q, r)$ pour $n \leq 5$.

eulériens classiques. Plus précisément, $D_{k,n}(1, 1, 1)$ énumère les permutations dans S_n ayant $n - k + 1$ descentes.

Comme chaque colonne d'un tableau de permutation possède nécessairement un point, cette information est superflue dans $D_{k,n}(p, q, r)$. On peut donc renormaliser de la façon suivante :

$$D_{k,n}^*(p, q, r) := q^{k-n} D_{k,n}(p, q, r). \quad (4.3)$$

Cette renormalisation permet de mettre en évidence certaines symétries de ces polynômes. En effet, on observe que

$$D_{k,n}^*(p, q, r) = D_{n-k+1,n}^*(p, q, r) \quad (4.4)$$

Il serait intéressant de vérifier si cette symétrie s'explique en terme de $F_\lambda(p, q)$. Le tableau 4.7 met en évidence une autre symétrie de $D_{k,n}^*(p, q, r)$. En effet, il découle du corollaire 3.3.1 (voir page 43) et de la proposition 4.1.3, que

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$k = 1$	1	q	q^2	q^3	q^4
$k = 2$		1	$q^2 + 3q$	$q^4 + 4q^3 + 6q^2$	$q^6 + 5q^5 + 10q^4 + 10q^3$
$k = 3$			1	$q^3 + 4q^2 + 6q$	$q^6 + 5q^5 + 15q^4 + 25q^3 + 20q^2$
$k = 4$				1	$q^4 + 5q^3 + 10q^2 + 10q$
$k = 5$					1

Tableau 4.5 $D_{k,n}(1, q, 1)$ pour n petit.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$k = 1$	1	1	1	1	1
$k = 2$		1	4	11	26
$k = 3$			1	11	66
$k = 4$				1	26
$k = 5$					1

Tableau 4.6 $D_{k,n}(1, 1, 1)$ pour n petit.

Corollaire 4.1.4. (Corteel, 2006) *Le nombre de permutations dans S_n avec $k - 1$ descentes et m occurrences du motif $(2\star 31)$ est égal au coefficient du terme q^m dans*

$$D_{k,n}^*(1, q, 1) = q^{-k^2} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [k-i]_q^n q^{ki} \left(\binom{n}{i} q^{k-i} + \binom{n}{i-1} \right)$$

Ce résultat est très intéressant, car c'est la première expression polynomiale connue donnant la distribution complète d'un motif de permutation de longueur plus grande que 2. Il s'agit par conséquent d'un grand pas permis par les tableaux de permutation. De plus, le corollaire 3.2.4 nous dirige vers un résultat similaire en lien avec les alignements et les croisements. Il serait intéressant de poursuivre la recherche dans cette direction.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k = 1$	1	1	1	1
$k = 2$		1	$2p + q + r$	$3p^2 + 3pq + 2pr + q^2 + qr + r^2$
$k = 3$			1	$3p^2 + 3pq + 2pr + q^2 + qr + r^2$
$k = 4$				1
	$n = 5$			
$k = 1$	1			
$k = 2$	$4p^3 + 6p^2q + 3p^2r + 4pq^2 + 3pqr + 2pr^2 + q^3 + q^2r + qr^2 + r^3$			
$k = 3$	$6p^4 + 11p^3q + 5p^3r + 9p^2q^2 + 7p^2qr + 6p^2r^2 + 4pq^3 + 4pq^2r + 6pqr^2 + 2pr^3$ $+ q^4 + q^3r + 2q^2r^2 + qr^3 + r^4$			
$k = 4$	$4p^3 + 6p^2q + 3p^2r + 4pq^2 + 3pqr + 2pr^2 + q^3 + q^2r + qr^2 + r^3$			
$k = 5$	1			

Tableau 4.7 $D_{k,n}^*(p, q, r)$ pour n petit.

CHAPITRE V

TABLEAUX DE PERMUTATION ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

Pour l'instant, on n'a discuté des tableaux de permutation que d'un point de vue combinatoire. Cependant, une des principales applications directes des tableaux de permutation se retrouve dans le domaine de la mécanique statistique, où ils permettent de déterminer les probabilités stationnaires de chaînes de Markov liées à l'étude d'un modèle appelé « Partially Asymmetric Exclusion Model » (PASEP). De plus, un sous-ensemble de l'ensemble des tableaux de permutation, l'ensemble des « tableaux de Catalan », intervient dans un second modèle appelé « Totally Asymmetric Exclusion Model » (TASEP). Ce sous-ensemble contient les tableaux de permutation n'ayant qu'une seule case pointée par colonne.

5.1 La mécanique statistique

D'un point de vue naïf, la mécanique statistique a pour but d'expliquer le comportement de différents systèmes physiques où interagissent une grande quantité de particules. Typiquement, on considère des modèles abstraits d'interactions de ces particules pour « calculer » les relations entre paramètres importants comme la pression, la chaleur, etc. Un des modèles classiques d'interaction entre « particules » gazeuses est connu sous le nom de PASEP. Il correspond tout simplement à considérer un tableau ψ à une seule ligne de longueur n dans lequel les points correspondent aux particules. Pour simplifier l'écriture, comme il n'y a qu'une ligne, on dénote i la case $(i, 1)$. Une case pointée est dite **occupée** pour signifier qu'elle contient une particule gazeuse. Sinon, elle est dite

libre . On considère la chaîne de Markov dont les états sont les remplissages de ψ avec les probabilités de transition suivantes :

- Une particule se déplace de la case i vers la case vide $i + 1$ avec une probabilité $\frac{1}{n+1}$.
- Une particule se déplace de la case i vers la case vide $i - 1$ avec une probabilité $\frac{q}{n+1}$.
- Si la première case est vide, une particule entre dans le système à la case 1 avec une probabilité $\frac{\alpha}{n+1}$.
- La particule de la dernière case quitte le système avec une probabilité $\frac{\beta}{n+1}$.
- Le système demeure inchangé avec une probabilité $1 - \frac{1+q+\alpha+\beta}{n+1}$.

La figure 5.1 illustre les 5 transitions possibles depuis l'état illustré.

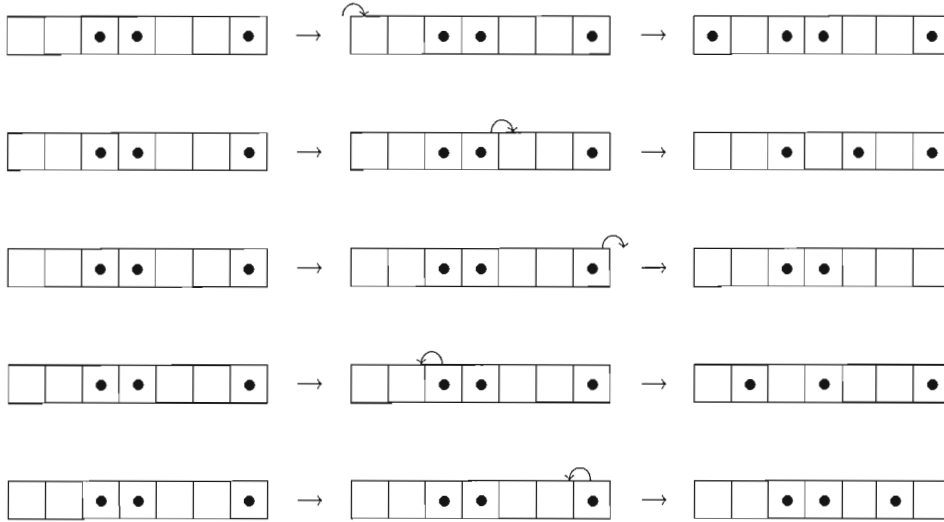


Figure 5.1 Exemple de transitions possibles à partir d'un état donné.

Lorsqu'on restreint le mouvement de la particule vers la droite, en excluant tout mouvement de retour, on obtient un second modèle largement étudié en mécanique statistique, le « Totally Asymmetric Exclusion Model » (TASEP). Les transitions de la chaîne de Markov associée au TASEP sont les suivantes :

- se déplacer de la case i vers la case vide $i + 1$.

- entrer dans le modèle à la case i si elle est vide.
- sortir du modèle si elle se trouve dans la dernière case.

5.2 Les tableaux de permutation et PASEP

Les tableaux de permutation interviennent dans le calcul des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov sur les états du PASEP. On voit ici de quelle façon calculer ces dernières grâce à cet outil.

On appelle **squelette** du tableau de permutation T le tableau obtenu en retirant tous les points de T . Considérons l'algorithme suivant générant le squelette d'un tableau de permutation à partir d'un remplissage de ψ .

Algorithme 5.2.1. Soit r un remplissage du tableau linéaire ψ . Premièrement, on trace un pas nord, puis pour chaque pas i par la suite, on trace un pas ouest si la i -ème case de ψ est libre et un pas nord si elle est occupée. La figure 5.2 présente une instance de cet algorithme.

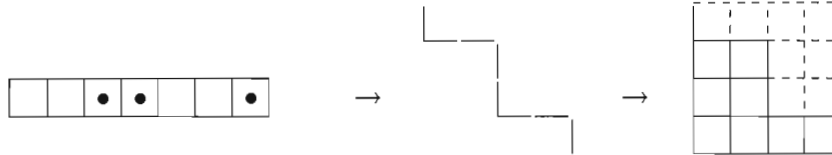
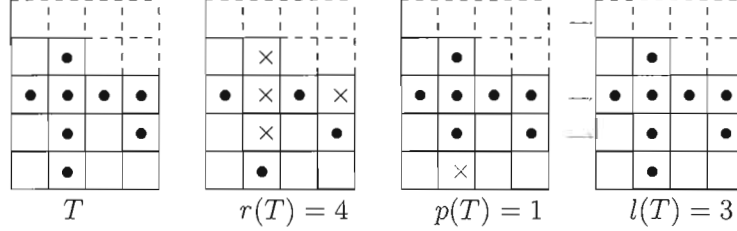


Figure 5.2 Tout état correspond à un unique squelette.

Considérons un tableau de permutation T . Trois statistiques vont intervenir dans la définition du poids de T . Le **rang** $r(T)$ du tableau qui est le nombre de points non essentiel-inférieur, le nombre $p(T)$ de points sur la première ligne de T , et le nombre $l(T)$ de lignes (excluant la première) n'ayant aucune case vide bornée au sud. Par exemple, dans l'exemple 5.2.1, $l(T) = 3$, car la case vide $(1, 4)$ est bornée au sud, donc la ligne qui contient cette case n'intervient pas dans le calcul de $l(T)$.

Exemple 5.2.1. Les quatres exemplaie du tableau de permutation T suivant illustrent ses trois statistiques $r(T)$, $p(T)$ et $l(T)$.



Le **poids** d'un tableau de permutation T est le monôme

$$w(T) = \alpha^{-p(T)} \beta^{-l(T)} q^{r(T)}. \quad (5.1)$$

Cette expression mène à la proposition suivante prouvée par Corteel et Williams.

Proposition 5.2.1. *Soit M_T la chaîne de Markov sur les tableaux de permutation d'index $n+1$ et T un tableau de permutation donné, alors la probabilité stationnaire associée à T est*

$$\frac{w(T)}{\sum_S w(S)}$$

où la somme est sur tous les tableaux de permutation d'index $n+1$.

On regroupe les poids de tous les tableaux de permutation d'un partage donné λ pour former le polynôme de Laurent

$$L_\lambda = L_\lambda(\alpha, \beta, q) = \sum_{\eta(T)=\lambda} \alpha^{-p(T)} \beta^{-l(T)} q^{r(T)}, \quad (5.2)$$

où la somme est sur tous les tableaux de permutation T de squelette λ . Les polynômes sont eux-mêmes regroupés en une fonction génératrice $W_n(x) = W_n$ définie comme suit.

$$W_n := \sum_{\lambda \vdash n} L_\lambda x^{n+1}.$$

Dans (Corteel et Williams, 2007), on définit une projection de la chaîne de Markov M_T sur les tableaux de permutation vers la chaîne de Markov M_P sur les états associés au PASEP, puis on montre que la probabilité stationnaire d'un état de M_P est la même que la probabilité stationnaire de se trouver dans n'importe quel état correspondant de M_T . Il en découle la proposition suivante.

Proposition 5.2.2. *Soit ψ un état du PASEP de longueur n et $\lambda := \lambda(\psi)$, la probabilité de retrouver ψ comme état stationnaire est*

$$\frac{L_\lambda}{W_n}.$$

Les tableaux de permutation interviennent donc dans le calcul des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov sur les états et transitions associés au PASEP.

5.3 Tableaux de Catalan

Le PASEP n'est pas le seul modèle de physique statistique en lien avec les tableaux de permutation. En effet, le TASEP (Totally Asymmetric Exclusion Process), très semblable au PASEP, est en lien étroit avec un sous-ensemble de l'ensemble des tableaux de permutation appelé ensemble des « tableaux de Catalan ». Les tableaux de Catalan sont utilisés, entre autres, pour calculer l'état d'équilibre associé à des particules gazeuses en mouvements selon le modèle TASEP. Une expression de la probabilité stationnaire du TASEP en terme de « tableaux de Catalan » a été trouvée par Corteel et Williams. Ensuite, Viennot a trouvé une bijection reliant combinatoirement cette expression à une autre expression de cette probabilité en terme de chemins dans le plan discret et trouvée précédemment par (Shapiro et Zeilberger, 1982). Pour présenter ces constructions, commençons par introduire la notion suivante en lien avec les tableaux de permutation.

Définition 5.3.1. Un **tableau de Catalan** est un tableau de permutation ayant exactement une case pointée par colonne.

Viennot a établi une bijection entre tableaux de Catalan et arbres binaires. Plus précisément, Viennot a décrit un algorithme itératif partant d'un tableau de Catalan et générant un arbre binaire. Il en découle la proposition suivante qui permet d'affirmer que les tableaux de Catalan sont comptés par les nombres de Catalan.

Proposition 5.3.1. *Les tableaux de Catalan d'index n sont en bijection avec les arbres binaires à $n - 1$ sommets.*

5.3.1 Tableaux de Catalan et TASEP

Le premier résultat concernant la probabilité stationnaire de la chaîne de Markov associée au TASEP est celui de Shapiro et Zeilberger. Il est défini en terme de chemins du plan discret formés de pas nord et de pas ouest. Rappelons qu'un chemin $((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k))$ est une suite de pas consécutifs dans le plan, c'est-à-dire une suite de points du plan discret tel que chacun est adjacent au point qui lui précède et à celui qui lui succède. Soit $\eta := ((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k))$ et $\sigma := ((c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_k, d_k))$ deux chemins ne contenant que des pas nord et des pas ouest. On dit que η est un **sous-chemin** de σ si $(a_1, b_1) = (c_1, d_1)$, $(a_k, b_k) = (c_k, d_k)$ et $b_i \leq d_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Soit $\alpha := ((3, 0), (3, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (0, 4))$ et $\beta := ((3, 0), (2, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 3), (0, 4))$ deux chemins dans le plan. La figure 5.3 illustre le fait que β est un sous-chemin de α .

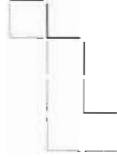


Figure 5.3 Sous-chemin d'un chemin dans le plan.

Soit e un état donné de la chaîne de Markov associée au TASEP de dimension n , et notons $\text{prob}(e)$ la probabilité stationnaire associée à l'état e . Soit de plus μ le chemin de partage associé à e par l'algorithme 5.2.1 (voir page 59), alors

$$\text{prob}(e) = \frac{1}{C_{n+1}} (\text{nombre de sous-chemins de } \mu). \quad (5.3)$$

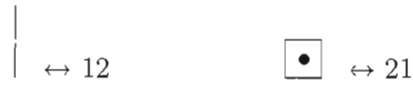
La seconde expression calculant cette probabilité stationnaire, démontrée par Cor-teel et Williams, est la suivante :

$$\text{prob}(e) = \frac{1}{C_{n+1}} (\text{nombre de tableaux de Catalan de chemin de partage } \mu). \quad (5.4)$$

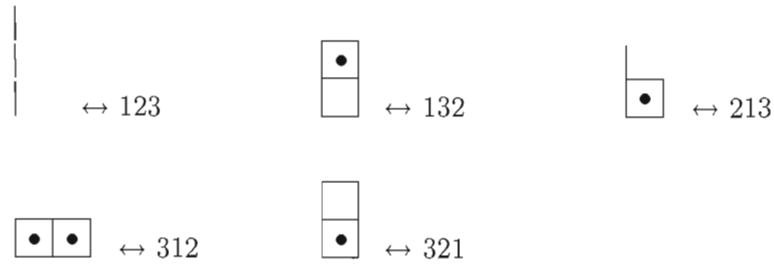
Il est naturel de vouloir relier combinatoirement les deux expressions 5.3 et 5.4. C'est ce qui est fait dans (Viennot, 2007).

On termine par la présentation des tableaux de Catalan pour $n \leq 4$. Comme attendu, le nombre de tableaux de Catalan pour un n donné correspond au n -ième nombre de Catalan.

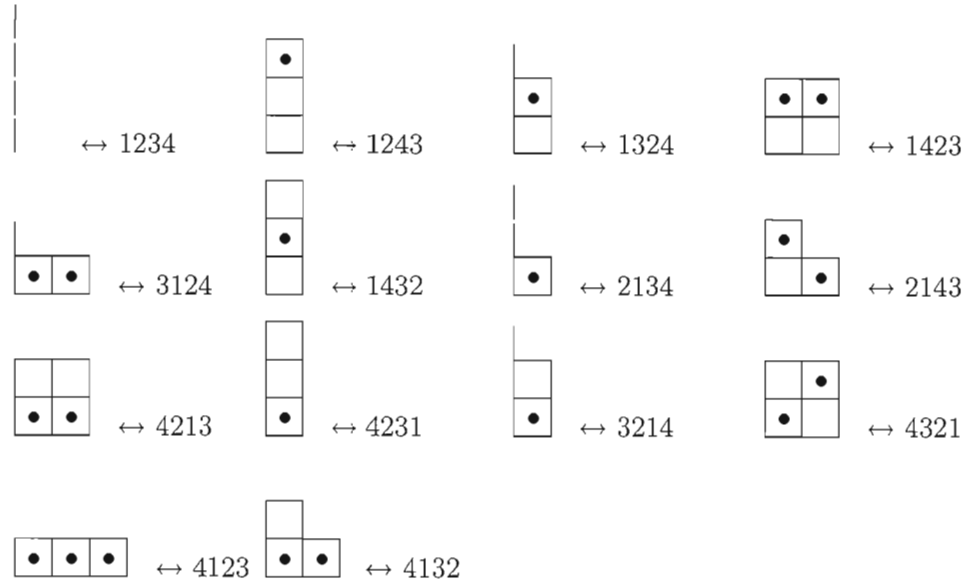
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



CONCLUSION

Les tableaux de permutation et les tableaux-vidés possèdent de fascinantes propriétés et sont très utiles dans le domaine de la combinatoire énumérative. On a présenté plusieurs résultats intéressants sur la traduction de certaines statistiques sur les permutations en terme de statistiques sur les tableaux de permutation et sur les tableaux-vidés.

On a aussi présenté quelques application des tableaux de permutation dans le domaine de la mécanique statistique, notamment pour la modélisation de particules gazeuses en mouvement. Les tableaux de permutation sont ainsi très présents pour l'étude du modèle appelé *Partially Asymmetric Exclusion Model* (PASEP), alors que les tableaux de Catalan le sont pour l'étude de celui appelé *Totally Asymmetric Exclusion Model* (TASEP).

Plusieurs questions semblent pour l'instant sans réponse concernant l'énumération des tableaux de permutation. Notamment, il serait intéressant de

- 1) Trouver une description plus efficace des polynômes $D_{k,n}(p, q, r)$ qui énumèrent les tableaux de permutations T selon leur nombre $a(T)$ de cases vides, $b(T)$ de cases pointées et $c(T)$ de cases fantômes.
- 2) Étendre les questions considérées aux tableaux gauches.
- 3) Généraliser ces questions au contexte des permutations signées.

INDEX

- bon ordre, 6
- case, 3
 - fantôme, 13
 - bornée, 5
 - borne est, 29
 - borne nord, 29
 - borne ouest, 29
 - borne sud, 29
 - déphasement, 29
 - dépolariser, 30
 - libre, 58
 - occupée, 57
 - pointée, 4
 - région à l'est, 5
 - région à l'ouest, 5
 - région au nord, 5
 - région au sud, 5
 - T-coordonnée, 15
 - vide, 5
- chemin, 5
 - début, 6
 - fin, 6
 - sous-chemin, 62
- colonne, 4
 - étiquette, 15
 - hauteur, 4
 - retrait, 20
- conditions initiales, 7
- dérangement, 9
- diagramme de Ferrer, 3
 - contenu, 4
- ligne, 4
 - étiquette, 15
 - longueur, 4
- parcours
 - début, 16
 - fin, 16
- parcours en zigzag, 17
 - tracé initial, 17
 - traverser, 19
 - zigzag, 17
- partage, 3
- pas, 5
 - début, 5
 - est, 5

- fin, 5
- nord, 5
- ouest, 5
- sud, 5
- PASEP, 57
- permutation, 8
 - alignement, 10
 - croisement, 10
 - dérangement, 9
 - descente, 9
 - excédance, 9
 - motif, 10
 - classique, 10
 - généralisé, 10
 - occurrence, 10
 - non-excédance, 9
 - point fixe, 9
- point essentiel
 - doublement, 26
 - inférieur, 26
 - latéral, 26
- points
 - adjacents, 5
- polynôme
 - énumérateur, 7
 - de tableaux, 51
 - de partage, 47
 - de tableaux, 47
- q-analogue, 53
- récurrence, 6
- rectangle, 4
- remplissage, 4
- sous-permutation, 9
- tableau, 5
- tableau de Catalan, 61
- tableau de permutation, 13
 - chemin de partage, 14
 - index, 14
 - parcours, 16
 - poids, 60
 - rang, 59
 - squelette, 59
 - tracé, 16
- tableau-vidé, 28
- TASEP, 58
- trait, 16
 - début, 16
 - est, 16
 - fin, 16
 - nord, 16
 - ouest, 16

sud, 16

vortex, 29

intérieur, 29

pépin, 29

horizontal, 29

vertical, 29

RÉFÉRENCES

- Burstein, A. 2007. « On some properties of permutation tableaux », *arXiv : math.CO/0703004*, à paraître dans *Annals of Combinatorics*.
- Corteel, S. 2006. « Crossing and alignments of permutations », *arXiv : math.CO/0601469*, à paraître dans *Advances in Applied Mathematics*.
- Corteel, S. et L. K. Williams. 2007. « A markov chain on permutations which projects to the pasep », *International Mathematics Research Notices*.
- Shapiro, L. et D. Zeilberger. 1982. « A markov chain occuring in enzyme kinetics », *Journal of Mathematical Biology*, vol. 15, p. 351–357.
- Steingrimsson, E. et L. K. Williams. 2007. « Permutation tableaux and permutation patterns », *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 114, p. 211–234.
- Viennot, X. 2007. « Catalan tableaux and the asymmetric exclusion process », *publications personnelles*.